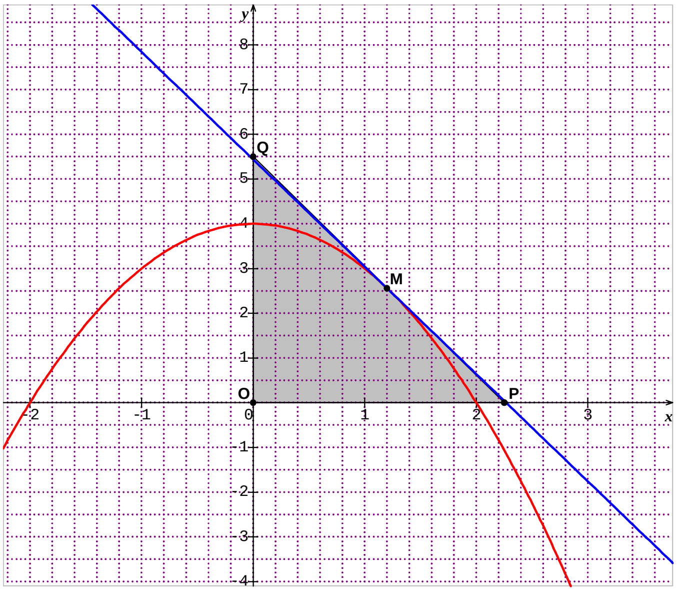
On considère la courbe C d'équation $y = 4 - x^2$.

Soit M un point de C d'abscisse $t \in]0 ; 2]$.

La tangente à C en M coupe l'axe des abscisses en P et l'axe des ordonnées en Q .

Déterminer t pour que l'aire du triangle OPQ soit minimum.



$f(x) = 4 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$.

L'équation de la tangente en $x = a$ à C_f est : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Donc la tangente à C en $x = t$ est : $T_t : y = f'(t)(x - t) + f(t)$,

$T_t : y = -2t(x - t) + (4 - t^2) \Leftrightarrow T_t : y = -2t.x + (t^2 + 4)$.

$P(x ; y) \in x'x \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = -2t.x + (t^2 + 4) \end{cases}$, soit $-2t.x + (t^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{t^2 + 4}{2t}$.

D'où : $P\left(\dfrac{t^2 + 4}{2t} ; 0\right)$.

$Q(x ; y) \in y'y \cap C \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2t.x + (t^2 + 4) \end{cases}$, soit $y = t^2 + 4$.

D'où : $Q(0 ; t^2 + 4)$.

Aire de OPQ : $A = g(t) = \dfrac{OP \times OQ}{2} = \dfrac{(t^2 + 4)^2}{4t}$ $(0 < t \leq 2)$.

On sait que $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ et que $(u^2)' = 2uu'$.

$g'(t) = \dfrac{1}{4}\dfrac{[2(t^2 + 4)].(2t)(t) - 1.(t^2 + 4)^2}{t^2} = \dfrac{(t^2 + 4)[4t^2 - (t^2 + 4)]}{4t^2} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{(t^2 + 4)(3t^2 - 4)}{4t^2}$.

$g'(t) = \dfrac{(t^2 + 4)(t\sqrt{3} + 2)(t\sqrt{3} - 2)}{4t^2}$.

$0 < t \leq 2$ fait que $\dfrac{(t^2 + 4)(t\sqrt{3} + 2)}{4t^2} > 0$, donc $g'(t)$ est du signe de $t\sqrt{3} - 2$.

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{3} - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1{,}155.$

$$g\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = g\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}+4\right)^2}{\frac{8}{\sqrt{3}}} = \frac{256}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{8} = 4\sqrt{3} \approx 6,928$$

t	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		2
$g'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$Aire = g(x)$	$\Vert$	$\searrow$	$4\sqrt{3}$	$\nearrow$	8

L'aire de OPQ est minimum lorsque $x_M = t = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et cette aire est alors $A = 4\sqrt{3}$.