Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

a) $\boldsymbol{f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3}$

f est de la forme $f = U^3$, de dérivée $f' = 3U^2.U'$.

$U = \frac{u}{v} \Rightarrow U' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^3 \Rightarrow f'(x) = 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\left(\frac{x-1}{x}\right)' = 3\left(\frac{x-1}{x}\right)^2\left(\frac{1.x - 1.(x-1)}{x^2}\right)$,

$f'(x) = \frac{3}{x^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$.

b) $\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2}}$ **.**

<u>Méthode 1</u> :

$g = \frac{1}{U} \Rightarrow g' = -\frac{U'}{U^2}$.

$U = u^2 \Rightarrow U' = 2uu'$.

$g(x) = \frac{1}{(x^2+x+1)^2} \Rightarrow g'(x) = -\frac{[(x^2+x+1)^2]'}{(x^2+x+1)^4} = -2\frac{(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4}$.

$g'(x) = -2.\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$.

<u>Méthode 2</u> : *Exposants fractionnaires*

On sait : $g = u^p \Rightarrow g' = p.u^{p-1}.u'$ pour $p \in \mathbb{Q} - \{1\}$.

$g = u^{-2} \Rightarrow g' = -2u^{-3}u'$, avec $u(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow u'(x) = 2x + 1$.

$g'(x) = -2(x^2+x+1)^{-3}(2x+1) = -2.\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}$.

c) $\boldsymbol{h(x) = \frac{(3x^3+5)^2}{(x^2+1)^3}}$ **.**

$h = \frac{U}{V} \Rightarrow h' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$ avec $\begin{cases} U = u^2 \Rightarrow U' = 2uu' \\ V = v^3 \Rightarrow V' = 3v^2v' \end{cases}$.

$h'(x) = \frac{2(3x^3+5)(9x^2)(x^2+1)^3 - 3(x^2+1)^2(2x)(3x^3+5)^2}{(x^2+1)^6} = \frac{6x(3x^3+5)(x^2+1)^2[3x(x^2+1) - (3x^3+5)]}{(x^2+1)^4}$,

$h'(x) = \frac{6x(3x^3+5)(x^2+1)^2(3x-5)}{(x^2+1)^4}$.