Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to f(x) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

1/ Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction polynôme est *continue* sur $\mathbb{R}$, donc $u : x \to u(x) = x^2 - 1$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.

La fonction $v : x \to v(x) = |x|$ est *continue* sur $\mathbb{R}$, donc $g = v \circ u$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.

La fonction $w : x \to w(x) = \sqrt{x}$ est *continue* sur $\mathbb{R}$, donc $f = w \circ v \circ u$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.

$f = w \circ v \circ u \Leftrightarrow f(x) = w[(v \circ u)(x)] = w[v(u(x))] = w[v(x^2 - 1)] = w(|x^2 - 1|) = \sqrt{|x^2 - 1|}$.

2/ Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

- Toute fonction polynôme est *dérivable* sur $\mathbb{R}$, donc $u : x \to u(x) = x^2 - 1$ est *dérivable* sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $v : x \to v(x) = |x|$ n'est à priori pas dérivable lorsqu'elle s'annule (pentes des tangentes différentes à gauche et à droite de $x = 0$), mais elle est dérivable sur le reste de son domaine.

Donc v est *dérivable* sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

On peut prévoir que $g = v \circ u$ sera *dérivable* sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$, puisque $x^2 - 1 = 0$ en $x = -1$ et $x = +1$.

- La fonction $w : x \to w(x) = \sqrt{x}$ n'est *dérivable* que sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

Sauf exception, une fonction racine n'est jamais dérivable là où elle s'annule, car $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *, donc si* $\sqrt{u} = 0$*,*

alors $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ *s'annulera au dénominateur, ce qui est impossible.*

$f = w \circ v \circ u \Leftrightarrow f(x) = w[(v \circ u)(x)] = w[v(u(x))]$.

On peut donc affirmer que f est dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$, comme composée de fonction dérivables sur cet intervalle, et il faut étudier avec précision la dérivabilité en $x = -1$ et $x = +1$.

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 - 1\rvert$		$x^2 - 1$	0	$-x^2 + 1$	0	$x^2 - 1$	

<u>Etude de la dérivabilité de f en $x = -1$:</u>

$$f'_g(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 0}{x + 1} .$$

Comme $x < -1$, on déduit $x + 1 < 0$, or <u>*seule une quantité positive peut être introduite dans une racine*</u>.

$$f'_g(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \left(-\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x + 1|} \right) = -\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x + 1)^2}} = -\lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{x - 1}{x + 1}} .$$

Le numérateur tend vers -2 et le dénominateur vers 0 <u>*par valeurs négatives*</u> (raison pour laquelle $\dfrac{x - 1}{x + 1} > 0$).

On déduit : $f'_g(-1) = -\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}} = -\infty$ (demi-tangente verticale à gauche en $x = -1$).

De même :

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{\sqrt{-x^2 + 1} - 0}{x + 1} \ .$$

Comme $x > -1$, on déduit $x + 1 > 0$, *quantité positive qui peut être introduite dans une racine*.

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x + 1|} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x + 1)^2}} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{(1 - x)(x + 1)}{(x + 1)^2}} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \sqrt{\frac{1 - x}{x + 1}} \ .$$

Le numérateur tend vers -2 et le dénominateur vers 0 *par valeurs positives* (raison pour laquelle $\frac{1 - x}{x + 1} > 0$).

On déduit : $f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \sqrt{\frac{1 - x}{x + 1}} = +\infty$ (demi-tangente verticale à droite en $x = -1$).

Etude de la dérivabilité de f en $x = +1$:

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \frac{\sqrt{-x^2 + 1} - 0}{x + 1} \ .$$

Comme $x < 1$, on déduit $x - 1 < 0$, *quantité positive qui peut être introduite dans une racine*.

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \left(-\frac{\sqrt{1 - x^2}}{|x - 1|} \right) = - \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(x - 1)^2}} = - \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \sqrt{\frac{1 - x^2}{(1 - x)^2}} = - \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \ .$$

Le numérateur tend vers +2 et le dénominateur vers 0 *par valeurs positives* (raison pour laquelle $\frac{1 + x}{1 - x} > 0$).

On déduit : $f'_g(1) = - \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} = -\infty$ (demi-tangente verticale à gauche en $x = +1$).

De même :

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1} - 0}{x - 1} \ .$$

Comme $x > 1$, on déduit $x - 1 > 0$, or *seule une quantité positive peut être introduite dans une racine*.

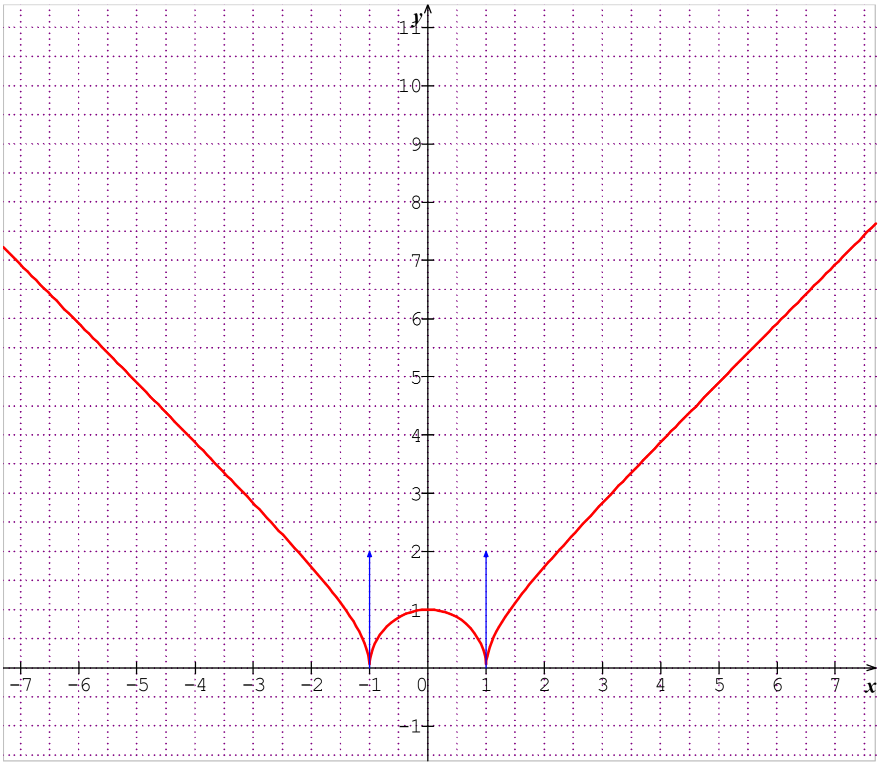
$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{|x - 1|} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x - 1)^2}} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} \ .$$

Le numérateur tend vers +2 et le dénominateur vers 0 *par valeurs positives* (raison pour laquelle $\frac{x + 1}{x - 1} > 0$).

On déduit : $f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \sqrt{\frac{x + 1}{x - 1}} = +\infty$ (demi-tangente verticale à droite en $x = +1$).

f n'est dérivable ni en $x = -1$, ni en $x = +1$.

***f* est *continue* sur $\mathbb{R}$, et *dérivable* sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$.**


y
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
−1
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
x