Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to f(x) = |x^2 - 1|$.

1/ Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction polynôme est *continue* sur $\mathbb{R}$, donc $u : x \to u(x) = x^2 - 1$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.

La fonction $v : x \to v(x) = |x|$ est *continue* sur $\mathbb{R}$, donc $f = v \circ u$ est *continue* sur $\mathbb{R}$.

Remarque : $(v \circ u)(x) = v[u(x)] = v(x^2 - 1) = |x^2 - 1| = f(x)$) .

2/ Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

Toute fonction polynôme est *dérivable* sur $\mathbb{R}$, donc $u : x \to u(x) = x^2 - 1$ est *dérivable* sur $\mathbb{R}$.

La fonction $v : x \to v(x) = |x|$ n'est à priori pas dérivable lorsqu'elle s'annule (pentes des tangentes différentes à gauche et à droite de $x = 0$), mais elle est dérivable sur le reste de son domaine.

Donc v est *dérivable* sur $\mathbb{R} - \{0\}$.

On peut prévoir que $f = v \circ u$ sera *dérivable* sur $\mathbb{R} - \{-1 ; +1\}$, puisque $x^2 - 1 = 0$ en $x = -1$ et $x = +1$.

Preuve :

x	$-\infty$		-1		$+1$		$+\infty$
$x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2 - 1\rvert$		$x^2 - 1$	0	$-x^2 + 1$	0	$x^2 - 1$	

Etude de la dérivabilité de f en $x = -1$:

$$f'_g(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} (x - 1) = -2 .$$

$$f'_d(-1) = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{(-x^2 + 1) - 0}{x + 1} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} \frac{1 - x^2}{1 + x} = \lim_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} (1 - x) = +2 .$$

$f'_g(-1) \neq f'_d(-1)$, donc f n'est pas dérivable en $x = -1$.

La fonction f présente un point anguleux en $x = -1$, avec deux demi-tangentes de pentes différentes.

Remarque :

Les fonctions $g : x \to g(x) = x^2 - 1$ et $h : x \to h(x) = -x^2 + 1$ étant *nativement* dérivables sur $\mathbb{R}$, il suffisait de vérifier que $g'(-1) \neq h'(-1)$, ce qui est le cas puisque $g'(x) = 2x$ et $h'(x) = -2x$.

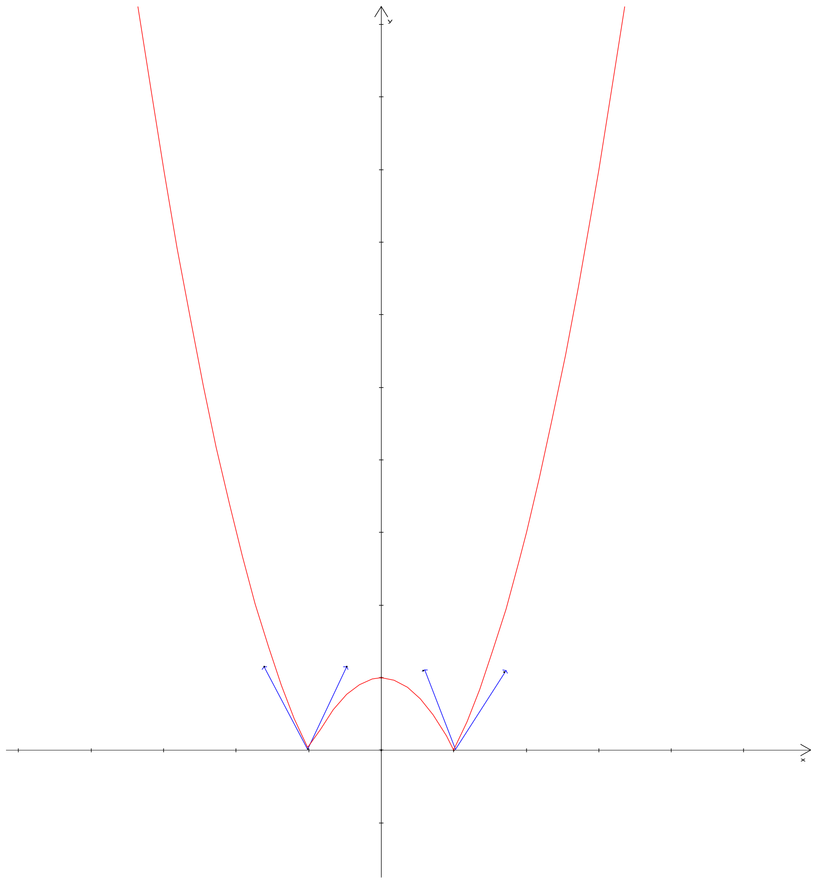
Etude de la dérivabilité de f en $x = +1$:

$$f'_g(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \frac{(-x^2 + 1) - 0}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} \frac{-(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x < +1}} -(x + 1) = -2 .$$

$$f'_d(1) = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{\substack{x \to +1 \\ x > +1}} (x + 1) = +2 .$$

$f'_g(1) \neq f'_d(1)$, donc f n'est pas dérivable en $x = +1$.

La fonction f présente un point anguleux en $x = +1$, avec deux demi-tangentes de pentes différentes.


y
x