1/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (1) suivante, d'inconnue x : $9x^4 - 85x^2 + 36 = 0$.

Effectuons un changement d'inconnue, en posant $X = x^2$.

L'équation, d'inconnue x , maintenant d'inconnue X , devient : $9X^2 - 85X + 36 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = 85^2 - 4(9)(36) = 5929 = 77^2 . \quad \begin{cases} X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{85 - 77}{18} = \dfrac{8}{18} = +\dfrac{4}{9} \\ X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{85 + 77}{18} = \dfrac{162}{18} = +9 \end{cases} .$$

$$\begin{cases} X = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x^2 = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{2}{3} \text{ ou } x_2 = +\dfrac{2}{3} \\ X = +9 \Leftrightarrow x^2 = +9 \Leftrightarrow x_3 = -3 \text{ ou } x_4 = +3 \end{cases} . \quad S = \{-3 \,;\, -\dfrac{2}{3} \,;\, +\dfrac{2}{3} \,;\, +3\} .$$

2/ Résoudre dans l'ensemble des réels non nuls :

a) L'équation (2) suivante, d'inconnue x : $\dfrac{9}{x^2} - \dfrac{85}{x} + 36 = 0$.

Effectuons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, d'où $X^2 = \dfrac{1}{x^2}$.

L'équation (2) d'inconnue x devient l'équation d'inconnue X : $9X^2 - 85X + 36 = 0$.

D'après 1/, on déduit $\begin{cases} X_1 = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x_1 = +\dfrac{9}{4} \\ X_2 = +9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} = +9 \Leftrightarrow x_2 = +\dfrac{1}{9} \end{cases}$. $S = \{+\dfrac{1}{9} \,;\, +\dfrac{9}{4}\}$.

b) L'équation (3) suivante, d'inconnue x : $\dfrac{9}{x^4} - \dfrac{85}{x^2} + 36 = 0$.

Effectuons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x^2}$, d'où $X^2 = \dfrac{1}{x^4}$.

L'équation (3) d'inconnue x devient l'équation d'inconnue X : $9X^2 - 85X + 36 = 0$, dont on connait les solutions X : $X_1 = +\dfrac{4}{9}$ et $X_2 = +9$.

$$\begin{cases} X = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} = +\dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x^2 = +\dfrac{9}{4} \Leftrightarrow x_1 = -\dfrac{3}{2} \text{ ou } x_2 = +\dfrac{3}{2} \\ X = +9 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2} = +9 \Leftrightarrow x^2 = +\dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x_3 = -\dfrac{1}{3} \text{ ou } x_4 = -\dfrac{1}{3} \end{cases} . \quad S = \{-\dfrac{3}{2} \,;\, -\dfrac{1}{3} \,;\, +\dfrac{3}{2} \,;\, +\dfrac{1}{3}\}.$$

***Autre méthode* : Soit $\dfrac{9}{x^4} - \dfrac{85}{x^2} + 36 = 0$.**

Effectuons le changement de variable $X = \dfrac{1}{x}$, d'où $X^2 = \dfrac{1}{x^2}$ et $X^4 = \dfrac{1}{x^4}$.

L'équation (3) d'inconnue x devient l'équation (4) d'inconnue X : $9X^4 - 85X^2 + 36 = 0$.

D'après 1/, on déduit $\begin{cases} X_1 = -3 \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{1}{X_1} = -\dfrac{1}{3} \\ X_2 = -\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x_2 = \dfrac{1}{X_2} = -\dfrac{3}{2} \\ X_3 = +\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x_3 = \dfrac{1}{X_3} = +\dfrac{3}{2} \\ X_4 = +3 \Leftrightarrow x_4 = \dfrac{1}{X_4} = +\dfrac{1}{3} \end{cases}$. $S = \{-\dfrac{3}{2} \,;\, -\dfrac{1}{3} \,;\, +\dfrac{3}{2} \,;\, +\dfrac{1}{3}\}$.