Dans un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$, on considère les points $A(-2\,;5)$, $B(-1\,;3)$, $C(4\,;1)$ et $D(-2\,;-3)$.
(d_m) est la droite d'équation cartésienne $mx - y + 4 = 0$, où m est un réel de l'intervalle $[-5\,;5]$.
Le but de l'exercice est de trouver les valeurs de m pour lesquels (d_m) vérifient des conditions données :

a) Calculer la valeur de m pour laquelle le point A appartient à la droite (d_m), puis la valeur de m pour laquelle le point B appartient à la droite (d_m).

$A(-2\,;5) \in (d_m) \Leftrightarrow m.(-2) - 5 + 4 = 0 \Leftrightarrow -2m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Seule la droite $(d_{-1/2})$ passe par $A(-2\,;5)$.

$B(-1\,;3) \in (d_m) \Leftrightarrow m.(-1) - 3 + 4 = 0 \Leftrightarrow -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = +1$.

Seule la droite (d_1) passe par $B(-1\,;3)$.

b) Calculer la valeur de m pour laquelle la droite (d_m) est parallèle à la droite (AB).

Remarque : Les droites (d_m) admettent toutes une équation réduite $y = mx + 4$.

Ceci prouve qu'aucune droite (d_m) n'est verticale.

Elles passent toutes par le point $E(0\,;4)$, donc ont toutes la même ordonnée $+4$ à l'origine.

Ce qui les différencie est leur *coefficient directeur* variable $a = m$ $(-5 \leq m \leq +5)$.

Le coefficient directeur de (AB) est $a' = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3-5}{-1-(-2)} = \frac{3-5}{-1+2} = -2$.

Le coefficient de (d_m) est $a = m$.

Pour être parallèles, il faut que ces droites aient même coefficient directeur :

$a = a' \Leftrightarrow m = -2$.

La droite (d_{-2}) est parallèle à (AB).

c) **Calculer la valeur de m pour laquelle les droite (AB), (CD) et (d_m) son concourantes en un même point. Donner les coordonnées de ce point de concours.**

On cherche le point d'intersection F des droites (AB) et (CD), puis on imposera au point F obtenu d'appartenir à la droite (d_m).

- On a vu que (AB) est de coefficient directeur $a' = -2$, soit d'équation réduite $y = -2x + b'$.

$A(-2\,;5) \in (AB) \Rightarrow 5 = -2\times(-2) + b'$, soit $5 = 4 + b' \Leftrightarrow b' = +1$.

La droite (AB) a pour équation $y = -2x + 1$.

- Cherchons l'équation réduite de (CD), de forme $y = a''x + b''$.

$a'' = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C} = \frac{-3-1}{-2-4} = \frac{-4}{-6} = +\frac{2}{3}$, soit une droite d'équation $y = \frac{2}{3}x + b''$.

$C(4\,;1) \in (CD) \Rightarrow 1 = \frac{2}{3}\times 4 + b''$, soit $1 = \frac{8}{3} + b'' \Leftrightarrow b'' = -\frac{5}{3}$.

La droite (CD) a pour équation $y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$.

$F(x\,;y) \in (AB) \cap (CD) \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x + 1 \\ y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \end{cases}$, soit $-2x + 1 = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$ (équation aux abscisses).

$-2x - \frac{2}{3}x = -\frac{5}{3} - 1 \Leftrightarrow -\frac{8}{3}x = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow x_F = +1$.

On reporte $x_F = 1$ dans une des deux équations de droites (AB) ou (CD) :

$y_F = -2x_F + 1 = -2\times 1 + 1$, soit $y_F = -1$.

Le point d'intersection de (AB) et (CD) est $F(1\,;-1)$.

Imposons $F(1\,;-1) \in (d_m)$ d'équation $y = mx + 4 \Leftrightarrow -1 = m + 4 \Leftrightarrow m = -5$.

Les droites (AB) , (CD) et (d_{-5}) sont concourantes en $F(1\,;-1)$.