On se place dans un repère orthonormé $(O\ ;\ I\ ;\ J)$.

Soient les points $A(-3\ ;\ 4)$, $B(0\ ;\ 6)$, $C(4\ ;\ 0)$ et $D(1\ ;\ -2)$.

1/ Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

Un quadrilatère est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en un même milieu.   Les coordonnées du milieu d'un segment sont les demi-sommes des coordonnées des extrémités de ce segment.

Soit I le milieu de la diagonale $[AC]$: $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_C}{2} = \dfrac{-3+4}{2} = +\dfrac{1}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_C}{2} = \dfrac{4+0}{2} = +2 \end{cases}$, soit $I\left(+\dfrac{1}{2}, +2\right)$.

Soit J le milieu de la diagonale $[BD]$: $\begin{cases} x_J = \dfrac{x_B + x_D}{2} = \dfrac{0+1}{2} = +\dfrac{1}{2} \\ y_J = \dfrac{y_B + y_D}{2} = \dfrac{6-2}{2} = +2 \end{cases}$, soit $J\left(+\dfrac{1}{2}, +2\right)$.

On constate que les milieux I et J de ces diagonales sont confondus, donc le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2/ Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

Vérifions que le triangle ABC est rectangle en B .

(Théorème de Pythagore)   *Un triangle est rectangle si et seulement si,*   *le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.* ABC rectangle en $A \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ --------------------------   *La distance AB vérifie* : $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$

ABC rectangle $B \Leftrightarrow AC^2 = BA^2 + BC^2$.

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (4-(-3))^2 + (0-4)^2 = 7^2 + 4^2 = 49 + 16 = 65$.

$BA^2 = (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = ((-3)-0)^2 + (4-6)^2 = (-3)^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$.

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (4-0)^2 + (0-6)^2 = 4^2 + (-6)^2 = 16 + 36 = 52$.

On constate bien que : $BA^2 + BC^2 = 13 + 52 = 65 = AC^2$.

3/ Que peut-on dire de plus du quadrilatère $ABCD$?

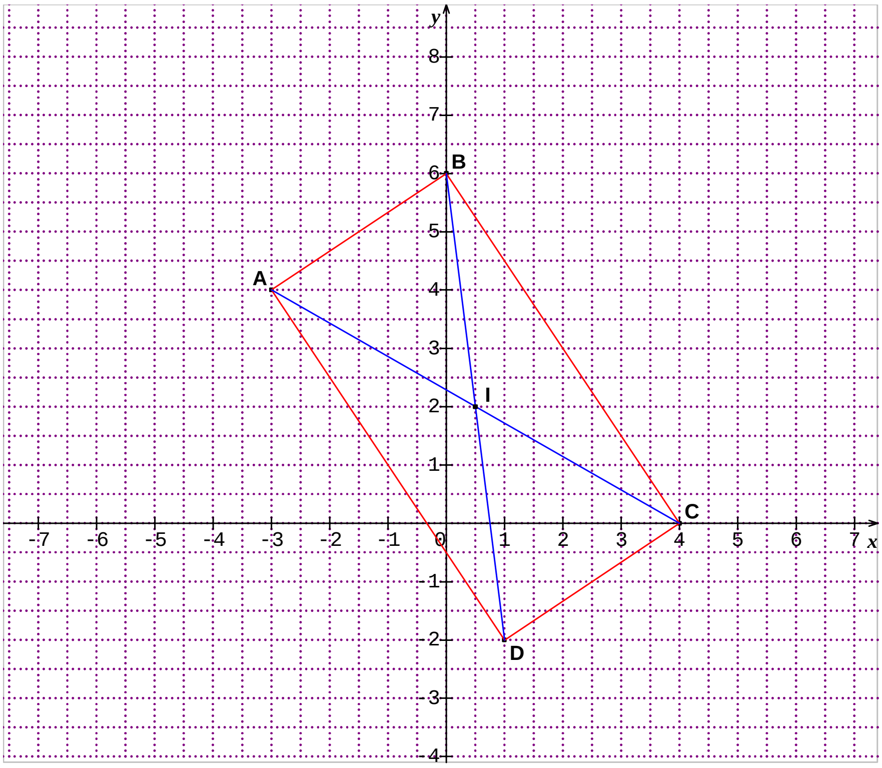
Le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme dont un sommet présente un angle droit.

$ABCD$ est donc un *rectangle* .

Remarque :

On pouvait aussi vérifier que les diagonales $[AC]$ et $[BD]$ ont la même longueur : $AC^2 = BD^2$.

Un parallélogramme dont les diagonales ont même longueur est un rectangle.


A
B
C
D
I
x
y