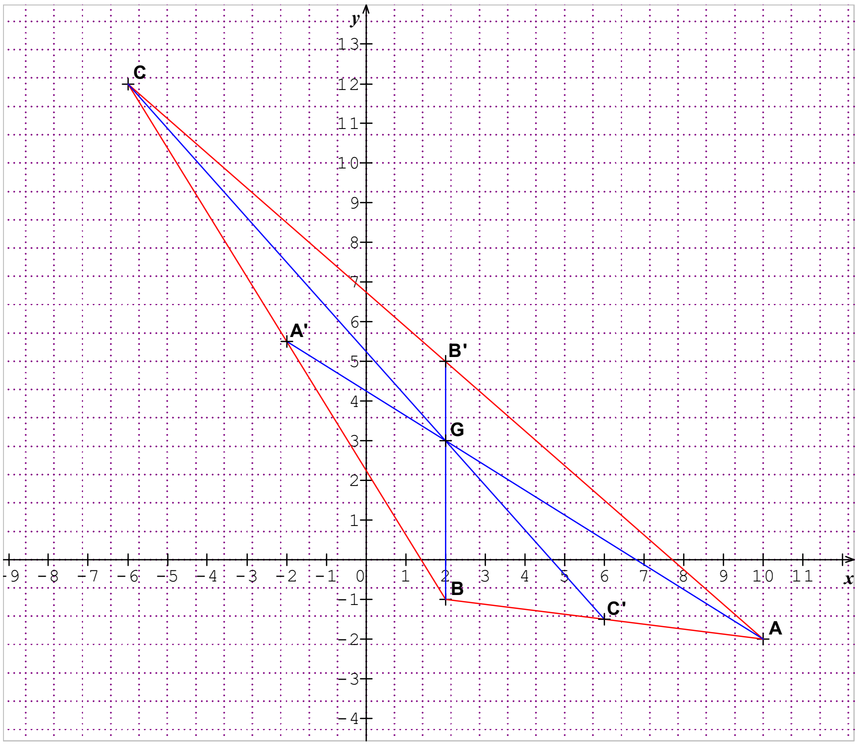
On se place dans un repère $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$.

Soient les points $A(10\ ;\ -2)$, $B(2\ ;\ -1)$, $C(-6\ ;\ 12)$.



1/ Déterminer des équations cartésiennes des trois médianes du triangle ABC .

Soit A' le milieu du côté $[BC]$: $\begin{cases} x_{A'} = \dfrac{x_B + x_C}{2} = -2 \\ y_{A'} = \dfrac{y_B + y_C}{2} = +\dfrac{11}{2} \end{cases}$, soit $A'(-2\ ;+\dfrac{11}{2})$.

Soit B' le milieu du côté $[AC]$: $\begin{cases} x_{B'} = \dfrac{x_A + x_C}{2} = +2 \\ y_{B'} = \dfrac{y_A + y_C}{2} = +5 \end{cases}$, soit $B'(+2\ ;+5)$.

Soit C' le milieu du côté $[AB]$: $\begin{cases} x_{C'} = \dfrac{x_A + x_B}{2} = +6 \\ y_{C'} = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$, soit $C'(+6\ ;-\dfrac{3}{2})$.

<u>Médiane du triangle issue de</u> A : $D_{AA'}$.

$M(x\ ;y) \in D_{AA'} \Leftrightarrow (\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{AA'})$ colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{x_M - x_A}{x_{A'} - x_A} = \dfrac{y_M - y_A}{y_{A'} - y_A} \Leftrightarrow \dfrac{x-10}{-12} = \dfrac{y+2}{\dfrac{15}{2}}$.

$\dfrac{15}{2}(x-10) = -12(y+2) \Leftrightarrow 15(x-10) = -24(y+2) \Leftrightarrow 15x + 24y - 102 = 0$.

Equation cartésienne de $D_{AA'}$: $5x + 8y - 34 = 0$.

Equation réduite : $y = -\dfrac{5}{8}x + \dfrac{17}{4}$.

Plusieurs autres présentations sont possibles, comme celle du <u>déterminant</u> (produit croisé)

$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow ab' - ba' = 0$.

<u>Médiane du triangle issue de</u> B : $D_{BB'}$.

On peut remarquer que $x_{B'} = x_B = +2$.

Tous les points de la droite (BB') ont même abscisse (droite verticale).

Son équation cartésienne est $D_{BB'} : x = +2$ ou $x - 2 = 0$.

<u>Médiane du triangle issue de</u> C : $D_{CC'}$.

$M(x\,;y) \in D_{CC'} \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM}\,;\overrightarrow{CC'})$ colinéaires $\Leftrightarrow \dfrac{x_M - x_C}{x_{C'} - x_C} = \dfrac{y_M - y_C}{y_{C'} - y_C} \Leftrightarrow \dfrac{x+6}{12} = \dfrac{y-12}{-\frac{27}{2}}$.

$-\dfrac{27}{2}(x+6) = 12(y-12) \Leftrightarrow -27(x+6) = 24(y-12) \Leftrightarrow -27x - 24y + 126 = 0$.

Equation cartésienne de $D_{CC'}$: $9x + 8y - 42 = 0$.

Equation réduite : $y = -\dfrac{9}{8}x + \dfrac{21}{4}$.

2/ Prouver que ces trois droites sont concourantes en un point dont on donnera les coordonnées.

La méthode consiste à chercher le point d'intersection G de deux médianes et vérifier qu'il appartient également à la 3ème médiane.

Utilisons $D_{BB'}$ *d'équation simple* $x = +2$.

$M(x\,;y) \in D_{AA'} \cap D_{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{8}x + \frac{17}{4} \\ x = +2 \end{cases}$, soit $y = -\dfrac{5}{8}(2) + \dfrac{17}{4} = +3$.

D'où : $G(+2\,;+3)$.

Vérifions $G(+2\,;+3) \in D_{CC'} \Leftrightarrow y = -\dfrac{9}{8}x + \dfrac{21}{4} \Leftrightarrow +3 = -\dfrac{9}{8}(2) + \dfrac{21}{4} = +\dfrac{12}{4}$ (vérifié).

On sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes au point G (centre de gravité) , situé aux deux-tiers de chaque médiane, en partant de son sommet.

$\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$. On sait aussi : $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.