On considère le trinôme du second degré $x^2 - (2m + 3)\,x + m^2$, pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

1ère méthode :

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ce trinôme admet une racine double

Remarque : Ce trinôme est nécessairement du second degré car le coefficient de x^2 n'est pas nul.

Donc, soit il n'admet pas de racine (si $\Delta < 0$) , soit il admet une racine *double* (2 racines confondues) (si $\Delta = 0$) , soit il admet deux racines distinctes (Si $\Delta > 0$).

Par contre, $(m - 1)\,x^2 + mx + 3$ n'est pas nécessairement du second degré. Si $m = +1$, il se ramène à une expression du 1er degré, $x + 3$, avec racine unique $x = -3$.

Chaque trinôme ayant son propre discriminant, on peut nommer celui-ci Δ_m .

$\Delta_m = b^2 - 4ac = (2m + 3)^2 - 4m^2 = (2m + 3)^2 - (2m)^2$, de forme $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

$\Delta_m = (2m + 3 - 2m)(2m + 3 + 2m) \Leftrightarrow \Delta_m = 3(4m + 3)$.

$\Delta_m = 0 \Leftrightarrow 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4}$. Seul $\Delta_{-3/4}$ est nul, donc seul le trinôme $x^2 - \left[2\left(-\dfrac{3}{4}\right) + 3\right]x + \left(-\dfrac{3}{4}\right)^2$, soit $x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{16}$, admet une racine double.

Calculer alors la valeur de cette racine.

Comme $\Delta = 0$, les deux racines sont égales (racine double) : $x' = x'' = -\dfrac{b}{2a} = +\dfrac{3}{4}$.

La parabole $y = x^2 - \dfrac{3}{2}x + \dfrac{9}{16}$ est *tangente* à l'axe $x'x$ en $x = +\dfrac{3}{4}$.

2ème méthode (pour le fun) :

Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ce trinôme admet une racine double

Un trinôme du second degré admet une racine double, si et seulement si sa forme canonique se réduit au type $\boldsymbol{a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2}$ $= a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{b^2}{4a^2}\right)$.

Comme $a = 1$, le trinôme doit être de la forme $x^2 + bx + b^2 = (x + b)^2$.

Un trinôme admet une racine double s'il peut s'écrire $a(x \pm \alpha)^2$, donc en faisant apparaître un « carré parfait ».

Pour $x^2 - (2m + 3)x + m^2$, on déduit $\alpha^2 = m^2$, soit $\alpha = m$ ou $\alpha = -m$.

a) Si $\alpha = m$ $\begin{cases} (x - \alpha)^2 = (x - m)^2 = x^2 - 2mx + m^2 \Rightarrow -2m = -2m - 3 \text{ , soit } 0 = -3 \text{ (impossible)} \\ (x + \alpha)^2 = (x + m)^2 = x^2 + 2mx + m^2 \Rightarrow 2m = -2m - 3 \text{ , soit } 4m = -3 \Leftrightarrow m = -\dfrac{3}{4} \end{cases}$.

b) Si $\alpha = -m$, on retrouve la même solution m .

Conclusion : $x^2 - (2m + 3)x + m^2 = \left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2$, de racine double $x' = x'' = +\dfrac{3}{4}$.