Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\boldsymbol{x - \dfrac{x}{2x+4} = \dfrac{1}{x+2}}$ **.**

Soit $x - \dfrac{x}{2x+4} = \dfrac{1}{x+2}$.

Il est préférable de déterminer en préambule le domaine de définition.

L'équation précédente n'est calculable que si $\begin{cases} 2x+4 \neq 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases}$. On remarquera que $2x + 4 = 2(x + 2)$.

Donc la seule valeur de x hors domaine est -2 . $D = \mathbb{R} - \{-2\}$.

On peut mettre au même dénominateur $2(x + 2)$, mais il est plus rapide, puisqu'on a imposé $x + 2 \neq 0$, de multiplier les deux membres de l'équation précédente par $2(x + 2) = 2x + 4$.

$2x(x + 2) - x = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 2 = 0$ (a et c de signes opposés, donc $\Delta > 0$).

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25$. $\begin{cases} x' = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3-5}{4} = -2 \text{ !!} \\ x'' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+5}{4} = +\dfrac{1}{2} \end{cases}$. La valeur $x = -2$ est *hors domaine*.

$S = \{ +\dfrac{1}{2} \}$.

b) $\boldsymbol{(5x^6 - 7x^5)(4x^2 + \sqrt{32}\, x + 2) = 0}$ **.**

Factorisons au maximum : $(5x^6 - 7x^5)(4x^2 + \sqrt{32}\, x + 2) = 0 \Leftrightarrow x^5(5x - 7)(4x^2 + 4\sqrt{2}\, x + 2) = 0$.

$2x^6(5x - 7)(2x^2 + 2\sqrt{2}\, x + 1) = 0$.

<u>Astuce</u> : Un œil avisé remarquera que $2x^2 + 2\sqrt{2}\, x + 1 = (\sqrt{2}\, x)^2 + 2(\sqrt{2}\, x) + 1^2$, soit $a^2 + 2ab + b^2$.

Or : $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (\sqrt{2}\, x + 1)^2$.

La notation $(x\sqrt{2} + 1)^2$ est à privilégier, pour ne pas risquer d'inclure x sous la racine.

L'équation se résume donc à $2x^5(5x - 7)(x\sqrt{2} + 1)^2 = 0$.

Ce produit est nul si et seulement si l'un de ses facteurs est nul : $\begin{cases} x = 0 \\ 5x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = +\dfrac{7}{5} \\ x\sqrt{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

$S = \{ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \,;\, 0 \,;\, +\dfrac{7}{5} \}$.

Remarque : On remarque dans cet exercice l'avantage qu'il y a à factoriser au maximum l'expression, afin de mettre en évidence les éléments remarquables.