Les quatre propositions peuvent être examinées indépendamment les unes des autres.

On considère une suite (u_n) positive et la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n .

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

Justifier chaque réponse, éventuellement par un contre exemple.

1/ La suite (v_n) est bornée par 0 et 1 (<u>VRAI</u>).

$\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1 \Rightarrow 1 \le 1 + u_n \le 2 \Rightarrow \dfrac{0}{2} \le \dfrac{u_n}{1 + u_n} \le \dfrac{1}{1} \Rightarrow 0 \le v_n \le 1$.

Si la suite (u_n) est bornée par 0 et 1 , alors la suite (v_n) est bornée par 0 et 1 .

2/ Si la suite (u_n) est convergente, alors la suite (v_n) est convergente (<u>VRAI</u>).

Soit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{u_n}{1 + u_n}\right) = \dfrac{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n}{\lim\limits_{n \to +\infty} (1 + u_n)} = \dfrac{L}{1 + L}$.

Comme (u_n) est à termes positifs, on ne peut avoir $L = -1$, donc $1 + L$ ne peut être nul.

$\dfrac{L}{1 + L}$ est calculable, donc : Si (u_n) converge, alors (v_n) converge.

3/ Si la suite (u_n) est croissante, alors la suite (v_n) est croissante (<u>VRAI</u>).

(u_n) croissante $\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1}}{1 + u_{n+1}} - \dfrac{u_n}{1 + u_n} = \dfrac{u_{n+1}(1 + u_n) - u_n(1 + u_{n+1})}{(1 + u_{n+1})(1 + u_n)} = \dfrac{u_{n+1} + u_n u_{n+1} - u_n - u_n u_{n+1}}{(1 + u_{n+1})(1 + u_n)}$.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_{n+1} - u_n}{(1 + u_{n+1})(1 + u_n)}$.

Le dénominateur étant positif, on conclue que $v_{n+1} - v_n$ est du même signe que $u_{n+1} - u_n$.

Donc, $u_{n+1} - u_n \ge 0 \Rightarrow v_{n+1} - v_n \ge 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si la suite (u_n) est croissante, la suite (v_n) est également croissante.

4/ Si la suite (v_n) est convergente, alors la suite (u_n) est convergente (<u>FAUX</u>).

<u>*Contre-Exemple*</u> :

Soit $u_n = n$, soit (u_n) divergente, puisque $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$.

Or, $v_n = \dfrac{u_n}{1 + u_n} = \dfrac{n}{1 + n} = \dfrac{1}{\frac{1}{n} + 1}$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{n} + 1} = 1$.

La suite (v_n) est bien convergente, mais sans que (u_n) ne le soit.