Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir précisé leur domaine de définition :

a) $f(x) = -2x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x - \frac{1}{3}$ **.** $D_f = \mathbb{R}$ **.**

On utilise $(u + v)' = u' + v'$, $(ku)' = k(u')$ si k réel , $(x^n)' = nx^{n-1}$.

$f'(x) = -2(4x^3) + 3x^2 - \frac{1}{2}(2x) + 5 - 0 = -8x^3 + 3x^2 - x + 5$.

b) $g(x) = 2x^2 - \frac{3}{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + 1$ **.** $D_g = \mathbb{R}^{*+} =]0 ; +\infty[$ **.**

On sait que $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, d'où : $g'(x) = 2(2x) - 3\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + 0 = 4x + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{4\sqrt{x}}$.

c) $h(x) = x^2\sqrt{x}$ **.** $D_h = \mathbb{R}^+ = [0 ; +\infty[$ **.**

On peut utiliser $(uv)' = u'v + uv'$.

Il est plus rapide d'utiliser les <u>exposants fractionnaires</u> : $\sqrt{x} = x^{1/2}$.

$h(x) = x^2\sqrt{x} = x^2.x^{1/2} = x^{2 + 1/2} = x^{5/2}$.

On utilise $(x^p)' = px^{p-1}$: $h'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2} = \frac{5}{2}\sqrt{x^3} = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$.

d) $i(x) = \frac{1 - x^2}{2x + 5}$ **.** $D_i = \mathbb{R} - \{ -\frac{5}{2} \}$.

On utilise $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$i'(x) = \frac{-2x(2x + 5) - 2(1 - x^2)}{(2x + 5)^2} = \frac{-2x^2 - 10x - 2}{(2x + 5)^2} = \frac{-2(x^2 + 5x + 1)}{(2x + 5)^2}$.

e) $j(x) = (-x^2 + 3x + 1)^4$ **.** $D_j = \mathbb{R}$ **.**

Sachant que $(x^4)' = 4x^3$, on déduit : $(u^4)' = 4u^3.u'$ dès que $u(x)$ n'est pas exactement x .

$j(x) = (-x^2 + 3x + 1)^4 \Rightarrow j'(x) = 4(-x^2 + 3x + 1)^3(-2x + 3)$.

f) $k(x) = \frac{2}{7 - 3x}$ **.** $D_k = \mathbb{R} - \{ \frac{7}{3} \}$ **.**

On peut utiliser $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, mais sachant $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, on déduit $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

$k(x) = \frac{2}{7 - 3x} = 2\left(\frac{1}{7 - 3x}\right) \Rightarrow k'(x) = 2\left[-\frac{-3x}{(7 - 3x)^2}\right] = \frac{6x}{(7 - 3x)^2}$.

g) $l(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3$ **.** $D_l = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$ **.**

$l = u^3 \Rightarrow l' = 3u^2.u'$ avec $u(x) = x + \frac{1}{x} \Rightarrow u'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$.

On déduit : $l'(x) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 3\left(x + \frac{1}{x}\right)^2\left(\frac{x^2 - 1}{x^2}\right)$.

On remarque que la dérivée ne s'annule qu'en -1 *et* $+1$ *, et que son signe ne dépend que de* $x^2 - 1$.

h) $\boldsymbol{m(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^2}}$. $\boldsymbol{D_m = \mathbb{R}}$ **(le dénominateur n'est jamais nul).**

$$m = \frac{1}{u^2} = u^{-2} \Rightarrow m' = (-2u^{-2-1}).\,u' = -2u^{-3}.\,u' = -\frac{2u'}{u^3}\ ,\ \text{avec } u(x) = x^2+1 \Rightarrow u'(x) = 2x\,.$$

On déduit : $m'(x) = -\dfrac{2(2x)}{(x^2+1)^3} = -\dfrac{4x}{(x^2+1)^3}$.

i) $\boldsymbol{n(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}}$. $\boldsymbol{D_n = [-1\ ;\ +1[}$ **(il faut** $\boldsymbol{\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0}$ **et qu'elle soit définie).**

$n = \sqrt{u} \Rightarrow n' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ de forme $\dfrac{U}{V}$, donc de dérivée $\dfrac{U'V - V'U}{V^2}$

D'où : $u'(x) = \dfrac{1(1-x)-(-1)(1+x)}{(1-x)^2} = \dfrac{2}{(1-x)^2}$.

On déduit : $n'(x) = \dfrac{\dfrac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} = \dfrac{1}{(1-x)^2} \times \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ (<u>attention racine retournée</u>) .

j) $\boldsymbol{o(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3-2x}}}$. $\boldsymbol{D_o =]-\infty\ ;\ +\dfrac{3}{2}[}$ **(Il faut $\boldsymbol{3-2x > 0}$).**

Plusieurs méthodes sont possibles :

On peut faire $o = \dfrac{1}{U}$, soit $o' = -\dfrac{U'}{U^2}$ avec $U = \sqrt{u} \Rightarrow U' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $U^2 = u$.

$o' = -\dfrac{U'}{U^2} = -\dfrac{\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}}{u} = -\dfrac{u'}{2u\sqrt{u}}$, , avec $u(x) = 3-2x$ et $u'(x) = -2$.

Il est plus rapide de faire :

$$o = \frac{1}{\sqrt{u}} = \frac{1}{u^{1/2}} = u^{-1/2} \Rightarrow o' = -\frac{1}{2}u^{-1/2-1}.\,u' = -\frac{1}{2}u^{-3/2}.u' = -\frac{u'}{2u^{3/2}} = -\frac{u'}{2\sqrt{u^3}} = -\frac{u'}{2u\sqrt{u}},$$

D'où : $o' = -\dfrac{u'}{2u\sqrt{u}} \Rightarrow o'(x) = -\dfrac{-2}{2(3-2x)\sqrt{3-2x}} = \dfrac{1}{(3-2x)\sqrt{3-2x}}$.

On remarque que le domaine de définition fait que $o'(x) > 0$ *partout.*

k) $\boldsymbol{p(x) = \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^4}$. $\boldsymbol{D_p = \mathbb{R}}$ **.**

$p = U^4 \Rightarrow p' = 4U^3\,U'$ avec $U(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \Rightarrow U'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

On déduit : $p'(x) = 4\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^3 \times \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{16x(x^2-1)^3}{(x^2+1)^5}$.