Soit la fonction numérique f définie sur $[0\,;\,e[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1} & \text{pour } x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

1/ Vérifier que le domaine de définition de f est bien précisé ci-dessus.

$f(x) = \dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1}$ est défini (calculable) si et seulement si $\begin{cases} x>0 \text{ pour que } \ln x \text{ soit défini} \\ (\ln x)-1 \neq 0 \text{ soit } \ln x \neq 1 \text{ et } x \neq e \end{cases}$.

Le domaine de définition de f devrait être $\mathbb{R}_+^* - \{e\} =]0\,;\,e[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[$.

Comme l'énoncé rajoute $f(0) = 1$, le domaine devient $D = \mathbb{R}_+ - \{e\} = [0\,;\,e[\,\cup\,]e\,;\,+\infty[$.

On dit que l'on a prolongé f en 0 par $f(0) = 1$.

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, et en déduire la continuité de f en 0 .

Si x tend vers 0 , par valeurs positives (noté $x \to 0^+$) la fonction $\ln x$, qui est continue et croissante, tend vers $-\infty$.

On déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1}$ *indéterminée* de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination : $f(x) = \dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1} = \dfrac{(\ln x)\left(1+\dfrac{1}{\ln x}\right)}{(\ln x)\left(1-\dfrac{1}{\ln x}\right)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{\ln x}}{1-\dfrac{1}{\ln x}}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln x) = -\infty$, on déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, et en conséquence : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Plus x se rapproche de 0 , plus l'ordonnée de C se rapproche de 1 .

On dit que $f(0) = 1$ est un <u>prolongement</u> de f en 0 par <u>continuité</u>.

3/ Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

On vient de voir $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$.

Etude de $\lim\limits_{x\to e^-} f(x)$:

Si x tend vers e par valeurs inférieures, $\ln x$ tend vers $\ln e = 1$, également par valeurs inférieures, puisque la fonction $\ln x$ est continue et strictement croissante, donc conserve les ordres. D'où : Si $x \to e^-$ alors $\ln x \to 1^-$ et $\left\{\begin{array}{l} (\ln x)+1 \to 2 \\ (\ln x)-1 \to 0^- \end{array}\right\}$, soit $\dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1} \to -\infty$.

On déduit $\lim\limits_{x\to e^-} f(x) = -\infty$.

Etude de $\lim\limits_{x\to e^+} f(x)$:

Si x tend vers e par valeurs supérieures, $\ln x$ tend vers $\ln e = 1$, également par valeurs supérieures. D'où :

Si $x \to e^+$ alors $\ln x \to 1^+$ et $\left\{\begin{array}{l} (\ln x)+1 \to 2 \\ (\ln x)-1 \to 0^+ \end{array}\right\}$, soit $\dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1} \to +\infty$.

On déduit $\lim\limits_{x\to e^+} f(x) = +\infty$.

La courbe C présente une asymptote verticale d'équation $x = e$.

Etude de $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$:

On sait que $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x) = +\infty$. On déduit $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(\ln x)+1}{(\ln x)-1}$ *indéterminée* de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination : $f(x) = \dfrac{(\ln x) + 1}{(\ln x) - 1} = \dfrac{(\ln x)\left(1 + \dfrac{1}{\ln x}\right)}{(\ln x)\left(1 - \dfrac{1}{\ln x}\right)} = \dfrac{1 + \dfrac{1}{\ln x}}{1 - \dfrac{1}{\ln x}}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} (\ln x) = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\ln x} = 0$, et en conséquence : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Plus x tend vers $+\infty$, plus l'ordonnée de C se rapproche de 1 .

La courbe C présente une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

4/ Déterminer la dérivée $f'(x)$ de la fonction f .

On sait que $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}[(\ln x) - 1] - \frac{1}{x}[(\ln x) + 1]}{[(\ln x) - 1]^2} = \frac{\frac{1}{x}(\ln x) - \frac{1}{x} - \frac{1}{x}(\ln x) - \frac{1}{x}}{[(\ln x) - 1]^2} = \frac{-\frac{2}{x}}{[(\ln x) - 1]^2} .$$

$f'(x) = -\dfrac{2}{x[(\ln x) - 1]^2}$. Comme $x > 0$, on déduit : $f'(x) < 0$ sur l'ensemble du domaine.

5/ Déterminer l'équation réduite de la tangente à C en son point d'abscisse 1 .

On sait $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

$T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f(x) = \dfrac{(\ln x) + 1}{(\ln x) - 1}$ et $f'(x) = -\dfrac{2}{x[(\ln x) - 1]^2}$,

soit $f(1) = -1$ et $f'(1) = -2$, d'où : $T_1 : y = -2(x - 1) - 1$.

$T_1 : y = -2x + 1$.

6/ Etablir le tableau de variation de f .

x	0			e			$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert -\infty$	$-$		$\Vert$		$-$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	$\searrow$	1

La non dérivabilité, et la pente ∞ en $x = 0$ sera expliquée au 9/

7/ Tracer sa courbe représentative C .

Voir plus bas.

***Complément TS* :**

8/ Déterminer les points d'intersection de C avec l'axe des abscisses.

Les points d'intersection de C et l'axe x' vérifient $\begin{cases} y = f(x) \text{ car situés sur } C \\ y = 0 \text{ car situés sur } x'x \end{cases}$, d'où $f(x) = 0$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(\ln x) + 1}{(\ln x) - 1} = 0 \Leftrightarrow (\ln x) + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$, soit $x = e^{-1} = \dfrac{1}{e}$.

C coupe $x'x$ en un point unique $I\left(\dfrac{1}{e}, 0\right)$, avec $\dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$.

9/ Etudier la dérivabilité de f en 0 .

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} .$$

$$f(x) - 1 = \frac{(\ln x) + 1}{(\ln x) - 1} - 1 = \frac{[(\ln x) + 1] - [(\ln x) - 1]}{(\ln x) - 1} = \frac{2}{(\ln x) - 1} .$$

On déduit : $f'(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{x[(\ln x) - 1]} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{(x \ln x) - x}$.

On sait que $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$, d'où $\lim_{x \to 0^+} [(x \ln x) - x] = 0$.

En remarquant que $(x \ln x) - x = x[(\ln x) - 1] < 0$ pour $x < e$, on déduit : $\lim_{x \to 0^+} \frac{2}{(x \ln x) - x} = -\infty$.

$f'(0) = -\infty$. La fonction f n'est pas dérivable en $x = 0$, et la tangente en 0 est verticale (pente ∞) .