1/ Etudier les variations de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$, pour tout x réel.

f est *définie, continue, et dérivable* sur $\mathbb{R}$, comme tout polynôme.

Dérivée :

$f'(x) = 6x^2 - 6x \Leftrightarrow f'(x) = 6x(x - 1)$.

Recherche des extremum :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ avec } f(0) = -1 \\ \text{ou} \\ x = 1 \text{ avec } f(1) = -2 \end{cases} .$$

Signe de la dérivée – Tableau de variation :

La dérivée $f'(x)$ est un trinôme du second degré de racines 0 et 1 , tel que $a = 2$ $(2x^2)$.

$f'(x)$ est du signe de $a = 2$, soit positive, à l'extérieur de ses racines.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

2/ Calculer $f(1)$ et $f(2)$:

On a vu que $f(1) = -2$, et par ailleurs : $f(2) = 2(2^3) - 3(2^2) - 1 = 16 - 12 - 1 = +3$.

En déduire que :

a) l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique sur l'intervalle $]1 ; 2[$;

D'après le tableau de variation de f , cette fonction est <u>*continue et strictement croissante*</u> sur l'intervalle $[1 ; 2]$. Sachant que $f(1) = -2$ et $f(2) = +3$, soit un <u>*changement de signe*</u> , cette continuité strictement croissante impose que $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur l'intervalle $]1 ; 2[$ (théorème de la valeur intermédiaire).

b) l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur le reste de son domaine de définition.

- f est continue et strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$ avec $f(0) = -1$ (maximum négatif), donc $f(x)$ ne peut pas être nul sur l'intervalle $]-\infty ; 0]$ (On a $f(x) \leq -1$ sur cet intervalle).
- f est continue et strictement décroissante sur $[0 ; 1]$ avec $f(0) = -1$ (maximum négatif), donc $f(x)$ ne peut pas être nul sur l'intervalle $[0 ; 1]$ (On a $-2 \leq f(x) \leq -1$ sur cet intervalle) .
- f est continue et strictement croissante sur $[2 ; +\infty[$ avec $f(2) = +3$, donc $f(x)$ ne peut pas être nul sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$ (On a $f(x) \geq 3$ sur cet intervalle).

3/ Etudier les variations de la fonction g définie sur l'intervalle $]-1 ; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$.

On remarquera que $1 + x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3 = -1 \Leftrightarrow x = -1$.

L'expression $\dfrac{1-x}{1+x^3}$ est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, donc la fonction g est une *restriction* de cette fonction à l'intervalle $]-1 ; +\infty[$.

f est *définie, continue et dérivable* sur $]-1 ; +\infty[$, comme rapport de polynômes.

Dérivée :

$$g = \frac{u}{v} \Rightarrow g' = \frac{u'v - v'u}{v^2}, \text{ soit } g'(x) = \frac{-1(1+x^3) - 3x^2(1-x)}{(1+x^3)^2} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 1}{(1+x^3)^2}.$$

On constate que $g'(x) = \dfrac{f(x)}{(1+x^3)^2}$.

Conséquence importante : La dérivée $g'(x)$ est partout du signe de $f(x)$ sur $]-1 ; +\infty[$.

- Lorsque $f(x) > 0$ (au dessus de l'axe $x'x$), on a $g'(x) > 0$, donc g croissante.
- Lorsque $f(x) = 0$ (coupe l'axe $x'x$), on a $g'(x) = 0$, donc g admet un extremum.
- Lorsque $f(x) < 0$ (au dessous de l'axe $x'x$), on a $g'(x) < 0$, donc g décroissante.

On déduit le signe de $f(x)$ de son tableau de variation précédent :

$f(x) < 0$ sur $]-\infty ; \alpha[$ avec $1 \leq \alpha \leq 2$ (une calculatrice donne $\alpha \approx 1{,}677$) ;

$f(\alpha) = 0$;

$f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$.

D'où le tableau de variation de g :

x	-1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	1	↘	$g(\alpha)$	↗	

Courbe représentative de g :