1/ Soit $f(x) = \dfrac{-x + \sqrt{x}}{x - 1}$ **.**

a) Déterminer le domaine de définition de f **.**

$f(x)$ est calculable si $x \geq 0$ et $x \neq 1$.

On peut cependant remarquer que $f(1) = \dfrac{0}{0}$, *forme indéterminée*, ce qui signifie qu'au contraire de n'être pas calculable en $x = 1$, la fonction peut prendre n'importe quelle valeur en ce point.

Comme une seule valeur de $f(1)$ doit être choisie, on verra plus bas que le choix le plus judicieux est celui qui assure la *continuité* de f en $x = 1$ (*prolongement par continuité en* $x = 1$).

On peut donc affirmer que $D_f = [0\ ;\ +\infty[$.

<u>*Remarque*</u> : f est définie et continue sur $[0\ ;\ +\infty[$, dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **,** $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **,** $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ **.**

- $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ **:**

$x = 0$ fait partie de D_f et la fonction f est la somme et le rapport de fonctions *continues* en $x = 0$.

La <u>continuité</u> de f en $x = 0$ permet d'affirmer : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$.

- $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ **:**

On a vu que f est *indéterminée* en $x = 1$. <u>*Levons l'indétermination en prolongeant*</u> f *en* $x = 1$ <u>*par continuité*</u>.

Comme $f(1) = \dfrac{0}{0}$, le numérateur doit permettre la factorisation d'un terme de forme $a - 1$.

$f(x) = \dfrac{-x + \sqrt{x}}{x - 1} = -\dfrac{\sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 1)}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}$. Le terme simplifiable est $\sqrt{x} - 1$, mais la simplification par 0 n'étant pas autorisée, ceci impose que $x \neq 1$, mais permet cependant d'approcher $x = 1$ autant que désiré, donc de calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

<u>*A étudier avec précision pour une bonne compréhension de cette indétermination*</u> :

Pour $x \neq 1$, $f(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$, tandis que la fonction $g(x) = -\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$ est par contre calculable en $x = 1$, telle que $g(1) = -\dfrac{1}{2}$.

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1)$ puisque g est continue en $x = 1$. On conclue $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\dfrac{1}{2}$.

On a prolongé f *par continuité en* $x = 1$ *, de fait, en remplaçant la fonction* f *par la fonction* g *qui lui est partout égale, sauf qu'en* $x = 1$ *la fonction* f *pouvait prendre n'importe quelle valeur, tandis que la fonction* g *prend une valeur unique en ce point.*

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$:

f est indéterminée de forme $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

<u>*Méthode rapide*</u> : Rapport des plus hauts degrés.

Sachant $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $f(x)$ se comporte en $+\infty$ comme $\frac{-x}{x} = -1$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

La courbe représentative de f admet une *asymptote horizontale* $y = -1$ *vers* $+\infty$.

<u>*Méthode détaillée*</u> : On factorise <u>*le plus petit*</u> degré entre le numérateur et le dénominateur, soit x .

$f(x) = \dfrac{x\left(-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{x\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = \dfrac{-1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{1 + \frac{1}{x}}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$. On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

2/ Soit $g(x) = \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de g .

$g(x)$ est calculable si $x + 3 \geq 0$ et $x \neq 1$.

Comme pour 1/ , la fonction g est *indéterminée* , de forme $\frac{0}{0}$ en $x = 1$, donc $D_g = [-3 ; +\infty[$.

g est définie et continue sur $[-3 ; +\infty[$ et dérivable sur $]-3 ; +\infty[$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$, $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

- $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$:

$x = 0$ fait partie de D_g et la fonction g est la somme et le rapport de fonctions *continues* en $x = 0$.

La <u>continuité</u> de g en $x = 0$ permet d'affirmer : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0) = +2$.

- $\lim\limits_{x \to 1} g(x)$:

Pour *lever l'indétermination* $\frac{0}{0}$ en $x = 1$, il faut faire apparaître le facteur $x - 1$ au numérateur, pour ensuite le simplifier. En présence d'une racine carrée, il faut exploiter la <u>*quantité conjuguée*</u> du numérateur.

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} = \frac{(\sqrt{x+3} - 2)(\sqrt{x+3} + 2)}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{(x+3) - 4}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} = \frac{x - 1}{(x-1)(\sqrt{x+3} + 2)} .$$

D'où : $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$ pour tout $x \neq 1$ du domaine.

On remarquera que pour alléger le travail, il n'a pas été fait mention de la fonction intermédiaire h telle que $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2}$, $\forall x \in [-3 ; +\infty[$, mais ce serait plus rigoureux.

On déduit : $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+3} + 2} = \dfrac{1}{4}$. *En posant* $g(1) = \frac{1}{4}$, on a *prolongé* g *par continuité en* $x = 1$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ **:**

g est indéterminée de forme $\frac{\infty}{\infty}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Sachant $\sqrt{x} = x^{1/2}$, $g(x)$ se comporte en $+\infty$ comme $\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

La courbe représentative de g admet une *asymptote horizontale* $y = 0$ *vers* $+\infty$ (axe des abscisses).