La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où X est un réel strictement positif.

On rappelle que, pour tout $t \geq 0$: $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

La fonction R, définie sur $[0\,;+\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée *fonction de fiabilité*.

1/ *Restitution organisée des connaissances* :

a) Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, on a : $R(t) = e^{-\lambda t}$.

$R(t) = P(X > t) = 1 - P(X \leq t) = 1 - \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx$.

Or, $(e^{-\lambda x})' = -\lambda e^{-\lambda x}$, d'où : $\int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = -e^{-\lambda t} + e^0 = -e^{-\lambda t} + 1$.

D'où : $R(t) = 1 - (-e^{-\lambda t} + 1) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie *sans vieillissement*, c'est-à-dire que, pour tout réel $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

Soit A l'évènement $(X > t)$ et B l'évènement $(X > t + s)$.

$P_{X>t}(X > t + s) = P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. Or $P(A \cap B) = P(B)$, d'où : $P_{X>t}(X > t + s) = \dfrac{R(t + s)}{R(t)}$

$P_{X>t}(X > t + s) = \dfrac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda s + \lambda t} = e^{-\lambda s}$, résultat indépendant de t .

2/ Dans cette question, on prend $\lambda = 0{,}000\,26$.

a) Calculer $P(X \leq 1\,000)$ et $P(X > 1\,000)$.

$P(X > 1\,000) = R(1\,000) = e^{-1000\lambda} = e^{-0{,}26} = 0{,}771$ par défaut.

$P(X \leq 1\,000) = 1 - R(1\,000) = 0{,}229$ par excès.

b) Sachant que l'évènement $(X > 1\,000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2\,000)$.

D'après 1-b), la loi étant sans vieillissement : $P_{X>1\,000}(X > 2\,000) = P(X > 1\,000) = 0{,}229$.

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, qu'elle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ?

Soit A l'évènement $(X > 2\,000)$ et B l'évènement $(X > 3\,000)$.

On demande $P_A(\overline{B}) = \dfrac{P(A \cap \overline{B})}{P(A)} = \dfrac{P(A) - P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = 1 - \dfrac{P(B)}{P(A)}$,

$P_A(\overline{B}) = 1 - P_{X>2\,000}(X > 3\,000) = 1 - P(X > 1\,000) = P(X \leq 1000) = R(1\,000) = 0{,}771$.

Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Conséquence de la loi *sans vieillissement* .