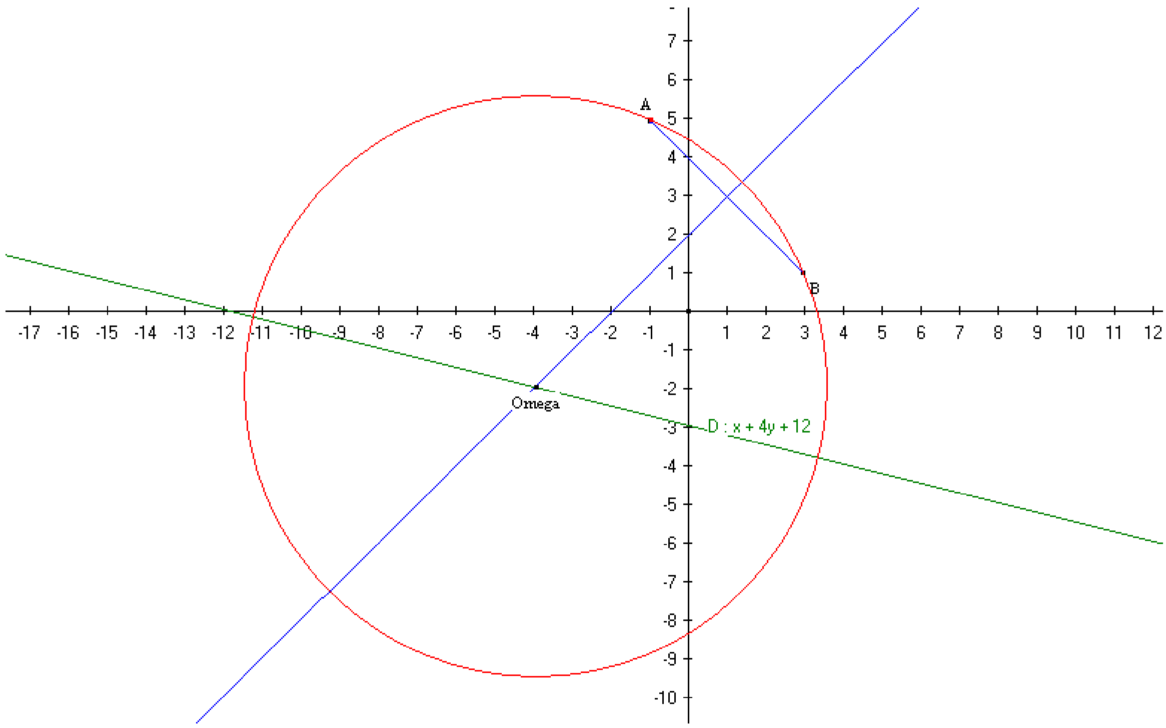
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j})$. On considère les points $A(-1\ ;\ 5)$ et $B(3\ ;\ 1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'équation du cercle (C) , passant par A et B , dont le centre Ω se trouve sur la droite (D) d'équation $x + 4y + 12 = 0$.



1/ Préciser les propriétés qui permettront de caractériser (C) .

$$\begin{cases} \Omega(x\ ,y) \text{ est équidistant de } A \text{ et } B \text{, soit } \Omega A^2 = \Omega B^2 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (y-5)^2 = (x-3)^2 + (y-1)^2 \\ \Omega(x\ ,y) \text{ appartient à } (D) \Leftrightarrow x + 4y + 12 = 0 \end{cases} .$$

De plus le rayon du cercle est $R = \Omega A$.

2/ Déterminer l'équation de (C) .

$\Omega(x\ ;\ y)$ est solution de $(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 10y + 25) = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1)$, équation qui se simplifie en : $8x - 8y + 16 = 0$, soit $x - y = -2$.

Donc $\Omega(x\ ;\ y)$ est solution du système $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 4y = -12 \end{cases}$, de couple solution $(x\ ;\ y) = (-4\ ;\ -2)$.

Le centre du cercle (C) est donc $\Omega(-4\ ;\ -2)$.

$\Omega A = \sqrt{(x_A - x_\Omega)^2 + (y_A - y_\Omega)^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58}$, rayon R du cercle (C) .

Tout point $M(x\ ;\ y)$ du cercle (C) cherché vérifie $\Omega M = R$, soit : $\Omega M^2 = R^2$.

L'équation cartésienne du cercle est donc $C :\ (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 58$, ou sous sa forme développée :

$C :\ x^2 + y^2 + 8x + 4y - 38 = 0$, vérifiée par chacun de ses points $M(x\ ;\ y)$.