1/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = 3n + 1 \qquad v_n = \frac{n}{n+1} \qquad w_n = -n^2 + 2n - 1 .$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *fonctionnelle* , ainsi $v_n = \frac{n}{n+1}$ est la traduction sur $\mathbb{N}$, de la fonction $f : x \mapsto f(x) = \frac{x}{x+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Lorsque qu'une suite est sous forme *fonctionnelle* , on peut *directement* calculer chaque terme de la suite.
Ainsi, $u_{125} = 3 \times 125 + 1 = 376$.

$u_0 = 3\times0 + 1 = 1$, $u_1 = 3\times1 + 1 = 4$, $u_2 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_3 = 3\times3 + 1 = 10$, $u_4 = 3\times4 + 1 = 13$.

On peut remarquer que la suite u est arithmétique*, de raison $r = +3$.*

$v_0 = \frac{0}{0+1} = 0$, $v_1 = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$, $v_3 = \frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$, $v_4 = \frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$.

On peut remarquer que $w_n = -n^2 + 2n - 1 = -(n^2 - 2n + 1)$, soit $w_n = -(n-1)^2$.

$w_0 = -(0-1)^2 = -1$, $w_1 = -(1-1)^2 = 0$, $w_2 = -(2-1)^2 = -1$, $w_3 = -(3-1)^2 = -4$, $w_4 = -(4-1)^2 = -9$.

2/ On considère les suites u , v et w définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 1 \end{cases} \qquad v : \begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \dfrac{v_n}{v_n + 1} \end{cases} \qquad w : \begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} .$$

Calculer les cinq premiers termes de chacune de ces suites.

Les suites u , v et w ont une présentation *récurrente* , c'est-à-dire que l'on ne peut calculer chaque terme de la suite qu'en fonction des termes qui le précédent, *de proche en proche*.

$u_0 = 2$, $u_1 = 3u_0 + 1 = 3\times2 + 1 = 7$, $u_2 = 3u_1 + 1 = 3\times7 + 1 = 22$,
$u_3 = 3u_2 + 1 = 3\times22 + 1 = 67$, $u_4 = 3u_3 + 1 = 3\times67 + 1 = 202$.

$$v_0 = 2 \ , \ v_1 = \frac{v_0}{v_0+1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3} \ , \ v_2 = \frac{v_1}{v_1+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}+1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5} ,$$

$$v_3 = \frac{v_2}{v_2+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5}+1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{7}{5}} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \ , \ v_4 = \frac{v_3}{v_3+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7}+1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9} .$$

Utilisons $w_{n+1} = -w_n^2 + 2w_n - 1$ sous la forme vue au 1/ : $w_{n+1} = -(w_n - 1)^2$:

$w_0 = 2$, $w_1 = -(w_0 - 1)^2 = -(2-1)^2 = -1$, $w_2 = -(w_1 - 1)^2 = -(-1-1)^2 = -4$,

$w_3 = -(w_2 - 1)^2 = -(-4-1)^2 = -25$, $w_4 = -(w_3 - 1)^2 = -(-25-1)^2 = -676$.