1/ Soit x un nombre réel. Montrer que : $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = -\sqrt{3}\sin x$.

On sait : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

On sait : $\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$ et $\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Par ailleurs : $\begin{cases} \sin(a - b) = \sin a.\cos b - \sin b.\cos a \\ \cos(a + b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b \end{cases}$. D'où :

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \left(\sin\frac{\pi}{6} . \cos x - \cos\frac{\pi}{6} . \sin x\right) + \left(\cos\frac{2\pi}{3} .\cos x - \sin\frac{2\pi}{3} .\sin x\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = -\sqrt{3}\sin x .$$

2/ Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'équation équivaut à : $-\sqrt{3}\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit : $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

On sait que : $\sin X = \sin A \Leftrightarrow \begin{cases} X = A + 2k\pi \\ \text{ou} \\ X = \pi - A + 2k\pi \end{cases}$ pour tout k entier relatif.

D'où deux infinités de solutions : $\begin{cases} \text{a/} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ \text{b/} \quad x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.