Soient les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\boldsymbol{S_1}\ \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{4}{5}y=-1 \\ 5x+12y=3 \end{cases} \qquad \boldsymbol{S_2}\ \begin{cases} 2y-3x=4 \\ 6y-9=0 \end{cases} \qquad \boldsymbol{S_3}\ \begin{cases} x+y=2x+3 \\ 2x+2y=x+y+1 \end{cases} .$$

Résoudre ces trois systèmes, en utilisant :

1/ Méthode par addition (ou combinaison linéaire).

2/ Méthode par substitution.

3/ Méthode par déterminant.

4/ Méthode graphique, par tracé de droites affines.

<u>*Système S_1*</u> :

Il est préférable de donner à ce système une forme qui soit plus exploitable :

$$S_1\ \begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{4}{5}y=-1 \\ 5x+12y=3 \end{cases} .$$

On peut éliminer les fractions en mettant au même dénominateur, ou en multipliant toute la première ligne par $3\times5=15$.

Après simplification le système devient $S_1\ \begin{cases} 5x+12y=-3 \\ 5x+12y=3 \end{cases}$.

On peut immédiatement conclure que la même expression ne peut simultanément valoir 3 et -3 , donc que le système n'admet pas de couple $(x\,;y)$ solution. $S=\varnothing$.

- *Méthode par addition* :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 5x+12y=-3 \\ 5x+12y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ -L_2 \end{matrix}\begin{cases} 5x+12y=-3 \\ -5x-12y=-3 \end{cases} .$$

Par addition en colonne, on obtient $0=-6$, ce qui est impossible, quels que soient x et y réels. D'où : $S=\varnothing$.

- *Méthode par substitution* :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix}\begin{cases} 5x+12y=-3 \\ 5x+12y=3 \end{cases} .$$

Sous cette forme simplifiée, la substitution de L_1 dans L_2 donne immédiatement en ligne L_2 : $-3=3$, qui est impossible. $S=\varnothing$.

- *Méthode par déterminant* :

$\begin{cases} 5x+12y=-3 \\ 5x+12y=3 \end{cases}$. On cherche les trois déterminants du système $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$.

Déterminant général : $D=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 5 & 12 \end{vmatrix}=ab'-ba'=60-60=0$.

Lorsque $D=0$, soit il n'y a aucun couple solution, soit il y en a une infinité, selon que l'un des deux déterminants suivants, D_x ou D_y est non-nul, ou que $D_x=D_y=0$.

Déterminant des x : $D_x=\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 12 \\ 3 & 12 \end{vmatrix}=cb'-bc'=-36-36=-72$.

Déterminant des y : $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = ac' - ca' = 15 + 15 = 30$.

On constate : $D = 0$, $D_x \neq 0$, donc il n'existe pas de couple $(x ; y)$ solution. $S = \varnothing$.

- *Méthode des droites affines* :

$$\begin{cases} 5x + 12y = -3 \\ 5x + 12y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12y = -5x - 3 \\ 12y = -5x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4} \\ y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4} \end{cases} .$$

Les couples $(x ; y)$ solutions de S_1 sont simultanément situés sur les droites affines $\begin{cases} y = -\frac{5}{12}x - \frac{1}{4} \\ y = -\frac{5}{12}x + \frac{1}{4} \end{cases}$.

On sait qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est de coefficient directeur a (pente) , quantité dont la droite monte ou descend quand x avance de $+1$, et d'ordonnée à l'origine b , hauteur ou la droite coupe l'axe $y'y$.

Les deux droites du système S_1 ont même coefficient directeur $a = a' = -\frac{5}{12}$, donc sont parallèles.

Par contre $b = -\frac{1}{4}$ et $b' = +\frac{1}{4}$, donc elles n'ont pas la même ordonnée à l'origine.

Les droites D_1 et D_2 du système S_1 sont strictement parallèles. D'où : $S = \varnothing$.

Voir le graphique à la fin.

Système S_2 :

Donnons à ce système une forme qui soit plus exploitable :

$$\begin{cases} 2y - 3x = 4 \\ 6y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 6y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 2y = 3 \end{cases} .$$

On peut immédiatement reporter $2y = 3$ dans $-3x + 2y = 4$ pour calculer x et y (substitution).

- *Méthode par addition* :

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 0x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ -L_2 \end{matrix} \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 0x - 2y = -3 \end{cases} .$$

Par addition en colonne, on obtient $-3x = 1$, soit $x = -\frac{1}{3}$, tandis que $2y = 3 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2}$.

Le système S_2 admet un couple solution unique $(x ; y) = (-\frac{1}{3} ; +\frac{3}{2})$. $S = \left\{ (-\frac{1}{3} ; +\frac{3}{2}) \right\}$.

- *Méthode par substitution* :

$\begin{matrix} L_1 \\ L_2 \end{matrix} \begin{cases} -3x + 2y = 4 \\ 2y = 3 \end{cases}$. On reporte $2y = 3$ dans $-3x + 2y = 4$.

$-3x + 3 = 4 \Leftrightarrow -3x = +1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$, tandis que $2y = 3 \Leftrightarrow y = +\frac{3}{2}$.

Le système S_2 admet un couple solution unique $(x ; y) = (-\frac{1}{3} ; +\frac{3}{2})$. $S = \left\{ (-\frac{1}{3} ; +\frac{3}{2}) \right\}$.

- *Méthode par déterminant* :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} -3x+2y=4 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} -3x+2y=4 \\ 0x+2y=3 \end{cases} .$$

$D = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6 - 0 = -6$ non nul. $\quad D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2 \quad D_y = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -9 - 0 = -9$.

Lorsque $D \neq 0$, il existe un couple solution unique $(x\,;y) = (\frac{D_x}{D}\,;\frac{D_y}{D}) = (\frac{2}{-6}\,;\frac{-9}{-6})$.

Le système S_2 admet un couple solution unique $(x\,;y) = (-\frac{1}{3}\,;+\frac{3}{2})$. $S = \left\{ (-\frac{1}{3}\,;+\frac{3}{2}) \right\}$.

- *Méthode des droites affines* :

$$\begin{cases} -3x+2y=4 \\ 2y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y=3x+4 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{3}{2}x+2 \\ \\ y=\frac{3}{2} \end{cases} .$$

La droite affine D_1 , d'équation $y = \frac{3}{2}x + 2$ est de coefficient directeur $a = +\frac{3}{2}$ et d'ordonnée à l'origine $b = +2$.

La droite affine D_2 , d'équation $y = \frac{3}{2}$ est *horizontale* , d'ordonnée constante $+\frac{3}{2}$.

Leur unique point commun est de coordonnées $(x\,;y) = (-\frac{1}{3}\,;+\frac{3}{2})$. D'où : $S = \left\{ (-\frac{1}{3}\,;+\frac{3}{2}) \right\}$.

Voir le graphique à la fin.

Système S_3 :

Donnons à ce système une forme qui soit plus exploitable :

$$\begin{cases} x+y=2x+3 \\ 2x+2y=x+y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} .$$

- *Méthode par addition* :

$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$. Par addition en colonne, on obtient $2y = 4$, soit $y = 2$.

On reporte $y = 2$ dans $x + y = 1$ pour trouver $x = -1$.

On peut aussi chercher à éliminer les y :

$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} -L_1 \\ L_2 \end{array}\begin{cases} x-y=-3 \\ x+y=1 \end{cases}$. Par addition en colonne, on obtient $2x = -2$, soit $x = -1$.

Le système S_3 admet un couple solution unique $(x\,;y) = (-1\,;2)$, soit $S = \{(-1\,;2)\}$.

- *Méthode par substitution* :

$$\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x+(x+3)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ 2x=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x=-1 \end{cases} .$$

Le système S_3 admet un couple solution unique $(x\,;y) = (-1\,;2)$, soit $S = \{(-1\,;2)\}$.

- *Méthode par déterminant* :

$\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$. $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $D_x = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $D_y = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

Comme $D \neq 0$, le système S_3 admet un couple solution unique $(x\,;y) = (\frac{D_x}{D}\,;\frac{D_y}{D}) = (-1\,;2)$.

D'où : $S = \{(-1\,;2)\}$.

- *Méthode des droites affines* :

$\begin{cases} -x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=x+3 \\ y=-x+1 \end{cases}$.

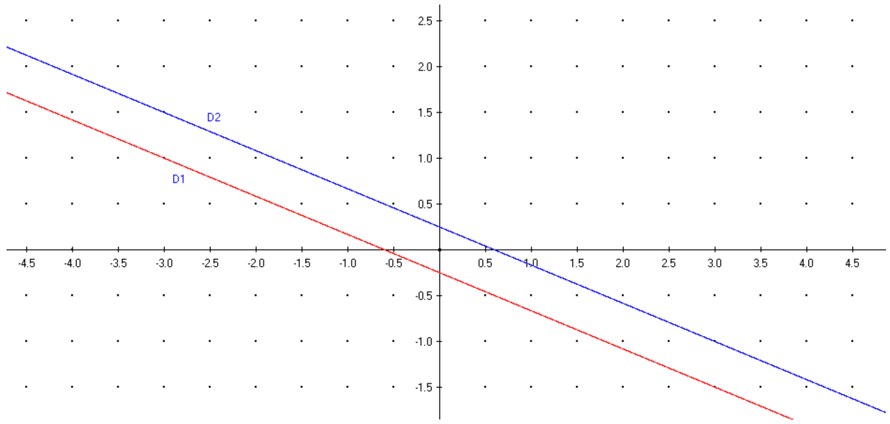
D_1 d'équation $y = x + 3$ est de coefficient directeur $a = +1$ et a pour ordonnée à l'origine $b = 3$.

D_2 d'équation $y = -x + 1$ est de coefficient directeur $a' = -1$ et a pour ordonnée à l'origine $b' = 1$.

Ces deux droites sont donc concourantes en $(x\,;y) = (-1\,;2)$, soit : $S = \{(-1\,;2)\}$.

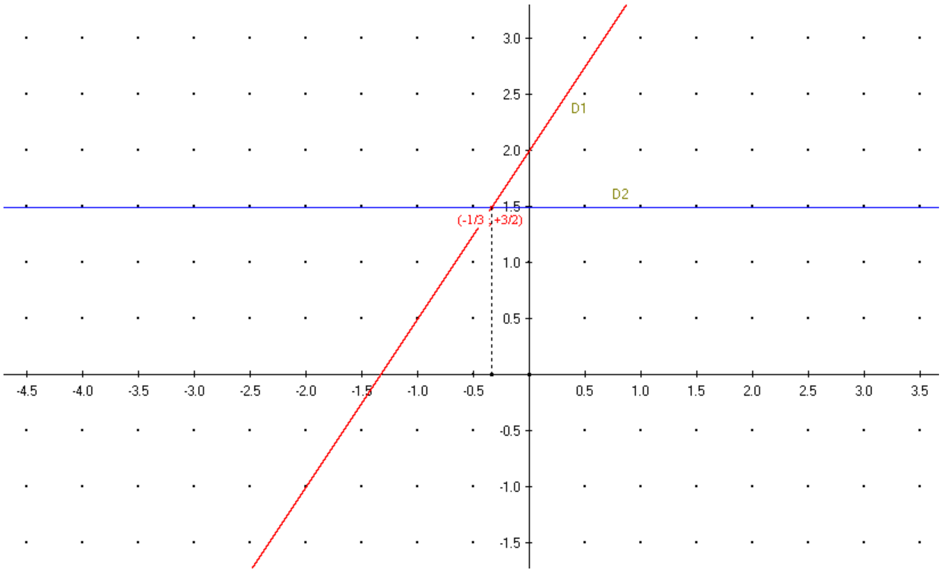
Voir le graphique ci-dessous.

Graphique S_1 :



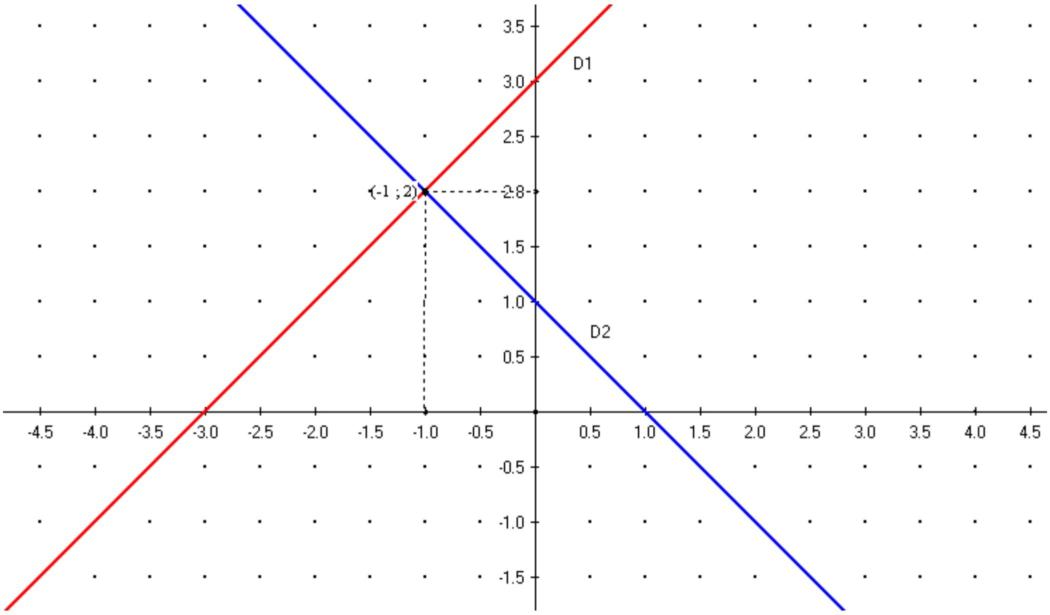
$S = \varnothing$

Graphique S_2 :



$S = \{(-\frac{1}{3}\,;+\frac{3}{2})\}$

Graphique S_3 :



$S = \{(-1 ; 2)\}$.