Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4 - u_n}$, pour tout n entier naturel.

La suite (v_n) est définie par : $v_n = \dfrac{3u_n + 2}{u_n}$.

1/ Montrer que la suite (v_n) est arithmétique, et préciser sa raison et son premier terme.

On peut écrire $v_n = 3 + \dfrac{2}{u_n}$.

$v_{n+1} - v_n = \left(3 + \dfrac{2}{u_{n+1}}\right) - \left(3 + \dfrac{2}{u_n}\right) = \dfrac{2}{u_{n+1}} - \dfrac{2}{u_n}$.

On sait que $u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{4 - u_n}$, soit : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = \dfrac{4 - u_n}{4u_n} = \dfrac{1}{u_n} - \dfrac{1}{4}$ ou $\dfrac{2}{u_{n+1}} = \dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{2}$.

Après report dans $v_{n+1} - v_n$, on obtient :

$v_{n+1} - v_n = \left(\dfrac{2}{u_n} - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{2}{u_n} = -\dfrac{1}{2}$ quantité constante.

On déduit : $v_{n+1} = v_n - \dfrac{1}{2}$.

La suite (v_n) est arithmétique, de raison $r = -\dfrac{1}{2}$, de premier terme $v_0 = 3 + \dfrac{2}{u_0} = 3 - 2 = +1$.

2/ Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.

On sait que la suite (v_n) de premier terme v_0, de raison r a pour terme général : $v_n = v_0 + nr$.

D'où : $v_n = 1 - \dfrac{n}{2}$.

En conséquence : $v_n = 3 + \dfrac{2}{u_n} \Leftrightarrow \dfrac{2}{u_n} = v_n - 3 = \left(1 - \dfrac{n}{2}\right) - 3$ soit : $\dfrac{2}{u_n} = -2 - \dfrac{n}{2} = -\dfrac{n+4}{2}$.

On déduit : $\dfrac{2}{u_n} = -\dfrac{n+4}{2} \Leftrightarrow u_n = -\dfrac{4}{n+4}$.

3/ En déduire la limite de la suite (u_n).

$u_n = -\dfrac{4}{n+4}$ implique $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{n+4} = 0$.

La suite (u_n) converge vers 0.