Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O\,,\,\vec{u},\,\vec{v})$, unité graphique 5 cm.

On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n$.

On note A_n le point du plan d'affixe z_n .

1/ Calculer z_1 , z_2 , z_3 , z_4 et vérifier que z_4 est un nombre réel.

On sait $z_0 = 2$, soit $A_0\,(2\,;\,0)$.

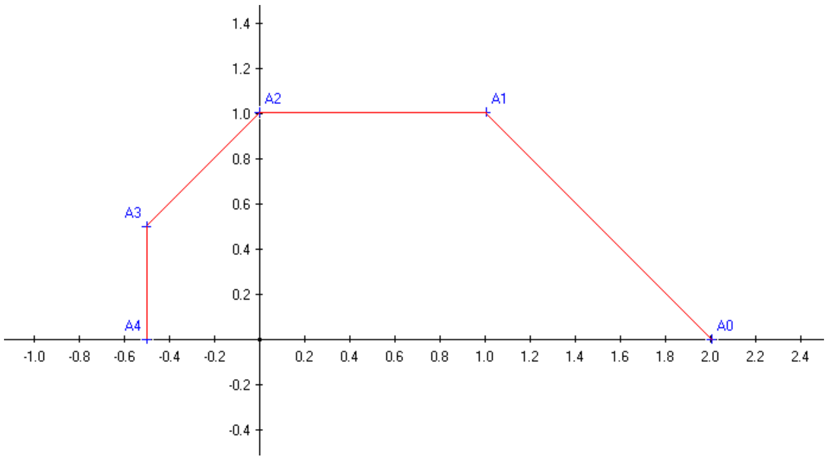
$z_1 = \dfrac{1+i}{2} z_0 = 1 + i \iff A_1(1\,;\,1)$.

$z_2 = \dfrac{1+i}{2} z_1 = \dfrac{(1+i)^2}{2} = \dfrac{1+2i-1}{2} = i \iff A_2(0\,;\,1)$.

$z_3 = \dfrac{1+i}{2} z_2 = \left(\dfrac{1+i}{2}\right) . \ i = \dfrac{i-1}{2} \iff A_3\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

$z_4 = \dfrac{1+i}{2} z_3 = \left(\dfrac{1+i}{2}\right)\left(\dfrac{-1+i}{2}\right) = \dfrac{i^2-1}{4} = -\dfrac{2}{4} = -\dfrac{1}{2} \iff A_4\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

Placer les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 et A_4 sur une figure.



2/ Pour tout entier naturel n , on pose $u_n = |z_n|$.

Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n , $u_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

$z_{n+1} = \dfrac{1+i}{2} z_n \Rightarrow |z_{n+1}| = \left|\dfrac{1+i}{2}\right| \times |z_n|$ avec $\left|\dfrac{1+i}{2}\right| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

On déduit : $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} u_n$.

La suite (u_n) est géométrique, de raison $q = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, de premier terme $u_0 = |z_0| = 2$.

D'où : $u_n = u_0\, q^n = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.

3/ A partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?

Il faut $|z_n| \leq 0{,}1 \iff u_n \leq 0{,}1 \iff 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}1 \iff \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leq 0{,}05 \iff n \ln\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leq \ln(0{,}05)$, Comme $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = 2^{-1/2}$, on déduit : $-\dfrac{n}{2}\ln 2 \leq \ln(0{,}05) \Leftrightarrow n \geq -\dfrac{2\ln(0{,}05)}{\ln 2} \Leftrightarrow n \geq 8{,}64$.

On déduit $n_0 = 9$.

A partir du point A_9 , tous les points A_n sont dans le disque de centre O , de rayon $0{,}1$.

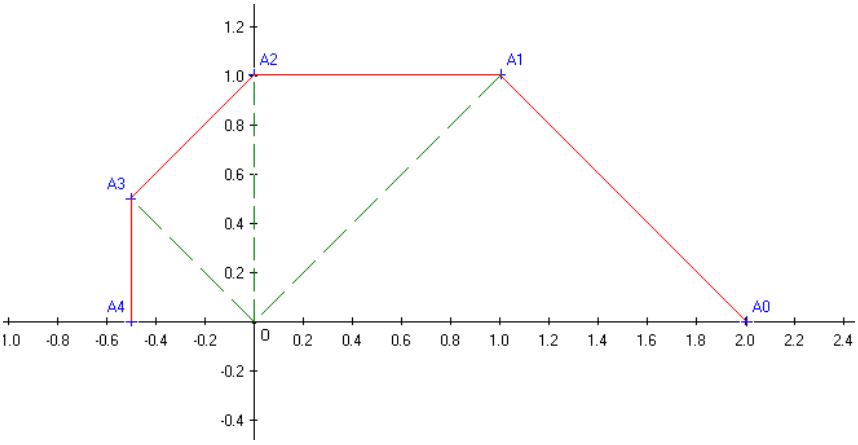
4-a) Etablir que, pour tout entier naturel n , $\dfrac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = i$.

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{\frac{1+i}{2} z_n - z_n}{\frac{1+i}{2} z_n} = \frac{(1+i)-2}{1+i} = \frac{-1+i}{1+i} = \frac{(-1+i)(1-i)}{2} = -\frac{(1-i)^2}{2} = -\frac{1-2i-1}{2} = i \; .$$

En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1} .

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = \frac{z_{A(n+1)} - z_{A(n)}}{z_{A(n+1)} - z_O} = i = 1.e^{i\pi/2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{A_nA_{n+1}}{OA_n} = 1 \Leftrightarrow A_nA_{n+1} = A_nO \\ (\overrightarrow{OA_n}\, , \overrightarrow{A_nA_{n+1}}) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases} .$$

On déduit que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle isocèle, de sommet A_n , ce qui se vérifie sur les premiers points :



b) Pour tout entier naturel n , on note L_n la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots\, A_{n-1}A_n$.
On a ainsi : $L_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$. Exprimer L_n en fonction de n .

En exploitant les triangles rectangles précédents : $L_n = OA_1 + OA_2 + \ldots + OA_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, somme de n termes d'une suite géométrique de 1er terme $u_1 = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$, de raison $q = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$L_n = u_1\frac{1-q^n}{1-q} = \sqrt{2}\,\frac{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\,\frac{\sqrt{2}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] = \frac{2}{\sqrt{2}-1}\left[1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right].$$

Déterminer la limite de la suite (L_n) .

Comme $|q| = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 0 < |q| < 1$, on déduit $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} L_n = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{2}{\sqrt{2}-1} \approx 4{,}83$.