On se place dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\,,\vec{i}\,,\vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $[-2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{e}{2}x^2 + (x+1)e^{-x}$.

On note (C_f) sa courbe représentative.

I – Etudier :

1/ $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$.

Si $x \to -\infty$ $\left\{ \begin{array}{c} x \to -\infty \\ -x \to +\infty \Rightarrow e^{-x} \to 0 \end{array} \right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x}$ est *indéterminé* de forme $0\times\infty$.

Pour lever l'indétermination, il faut se ramener à un résultat connu :

Posons $X = -x$, soit $x = -X$: $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = -\lim\limits_{X \to -\infty} Xe^{X} = 0$.

2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Si $x \to +\infty$ $\left\{ \begin{array}{c} \dfrac{e}{2}x^2 \to +\infty \\ (x+1)e^{-x} = xe^{-x} + e^{-x} \to 0 \\ \text{puisque } \lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0 \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0 \end{array} \right\}$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ par addition.

II -

1/ Déterminer la dérivée :

a) de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e}{2}x^2$.

$g(x)$ est de la forme Ax^2 avec $A = \dfrac{e}{2}$ qui est une constante. D'où : $g'(x) = 2Ax$.

D'où : $g'(x) = e.x$ (produit du nombre e par x, nulle exponentielle dans ce calcul).

b) de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x+1)e^{-x}$.

$h = uv \Rightarrow h' = u'v + uv'$ avec $(e^u)' = u'e^u$ qui implique $(e^{-x}) = (-1)e^{-x} = -e^{-x}$.

D'où : $h'(x) = 1.e^{-x} + (x+1)(-e^{-x}) \Rightarrow h'(x) = [1-(x+1)]e^{-x} = -xe^{-x}$.

2/ Soit x un élément de $[-2\,;+\infty[$.
Etablir que le nombre dérivé de f en x est égal à $x(e - e^{-x})$.

$f(x) = g(x) + h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$, soit : $f'(x) = e\,.x - xe^{-x}$.

On factorise x : $f'(x) = x(e - e^{-x})$.

3/ Après avoir étudié les variations de f, dresser son tableau de variation.

f est définie, continue et dérivable sur $[-2\,;+\infty[$ comme somme est produit de fonctions définies, continues et dérivables sur $[-2\,;+\infty[$.

Valeur et limite aux bornes du domaine :

$f(-2) = \frac{e}{2}(-2)^2 + (-2 + 1)e^2$, soit $f(-2) = 2e - e^2 = e(2 - e) \approx -1{,}95$.

On peut remarquer que $f'(-2) = -2(e - e^2) = -2e(1 - e) \approx 9{,}34$.

Cette information est intéressante, car elle indique la pente en -2 ,

le domaine de définition débutant arbitrairement en -2 *, alors qu'il pouvait se prolonger jusqu'en* $-\infty$.

D'après II-2/ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (forme comme le terme $\frac{e}{2}x^2$, qui est une parabole).

Dérivée :

On a vu que $f'(x) = x(e - e^{-x})$.

Recherche des Extremum :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ , } y = f(0) = e^0 = 1 \\ e - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = e^1 \Leftrightarrow -x = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ , } f(-1) = \frac{e}{2} \end{cases} .$$

La courbe présente deux extrema : $E(0 , 1)$ et $F(-1 , \frac{e}{2})$ avec $\frac{e}{2} = 1{,}36$.

Signe de la dérivée :

Cherchons le signe de $e - e^{-x}$, en *fixant* l'inéquation $e - e^{-x} > 0$.

$e - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -e^{-x} > -e \Leftrightarrow e^{-x} < e^1 \Leftrightarrow -x < 1 \Leftrightarrow x > -1$.

D'où le tableau de signes de la dérivée :

x	-2		-1		0		$+\infty$
x		–	|	–	0	+	
$e - e^x$		–	0	+	|	+	
$f'(x)$		+	0	–	0	+	

Tableau de Variation :

x	-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	9,34	+	0	–	0	+	
$f(x)$	$e(2 - e)$	↗	$\frac{e}{2}$	↘	1	↗	$+\infty$

4/ Tracer sa courbe représentative (C_f) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.