Soit l'équation paramétrique (E_m) : $e^x - mx - m = 0$ définie sur $\mathbb{R}$, avec m paramètre réel.

1/ Vérifier qu'aucune équation (E_m) ne peut admettre $x = -1$ pour solution.

-1 solution de $(E_m) \Leftrightarrow e^{-1} + m - m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{e} = 0$, ce qui n'est jamais possible, quelle que soit la valeur du paramètre m .

2/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$.

a) Montrer que, « x solution de (E_m) » équivaut à « x solution de $f(x) = m$ » .

x solution de $(E_m) \Leftrightarrow e^x - mx - m = 0 \Leftrightarrow e^x = m(x + 1)$.

D'après 1/ , $x = -1$ ne peut jamais être solution de (E_m) , d'où :

x solution de $(E_m) \Leftrightarrow \dfrac{e^x}{x+1} = m \Leftrightarrow f(x) = m \Leftrightarrow$ « x solution de $f(x) = m$.

b) Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, comme rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur ce domaine.

Limites aux bornes du domaine

- Si $x \to -\infty$, alors $\left\{\begin{array}{c} e^x \to 0 \\ x + 1 \to -\infty \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$.

La courbe (C) représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ vers $-\infty$.

- Si $x \to +\infty$, alors $\left\{\begin{array}{c} e^x \to +\infty \\ x + 1 \to +\infty \end{array}\right\}$, donc f est indéterminée, de forme $\dfrac{0}{0}$.

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Si $x \to -1^-$, alors $\left\{\begin{array}{c} e^x \to \dfrac{1}{e} \\ x + 1 \to 0^- \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} = -\infty$.

- Si $x \to -1^+$, alors $\left\{\begin{array}{c} e^x \to \dfrac{1}{e} \\ x + 1 \to 0^+ \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} = +\infty$.

La courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = -1$.

Dérivée

$f = \dfrac{u}{\mathrm{v}} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}$, soit $f'(x) = \dfrac{xe^x}{(x = 1)^2}$.

Recherche des Extremum

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, avec $y = f(0) = \dfrac{e^0}{0+1} = 1$. Extremum unique en $E(0 , 1)$.

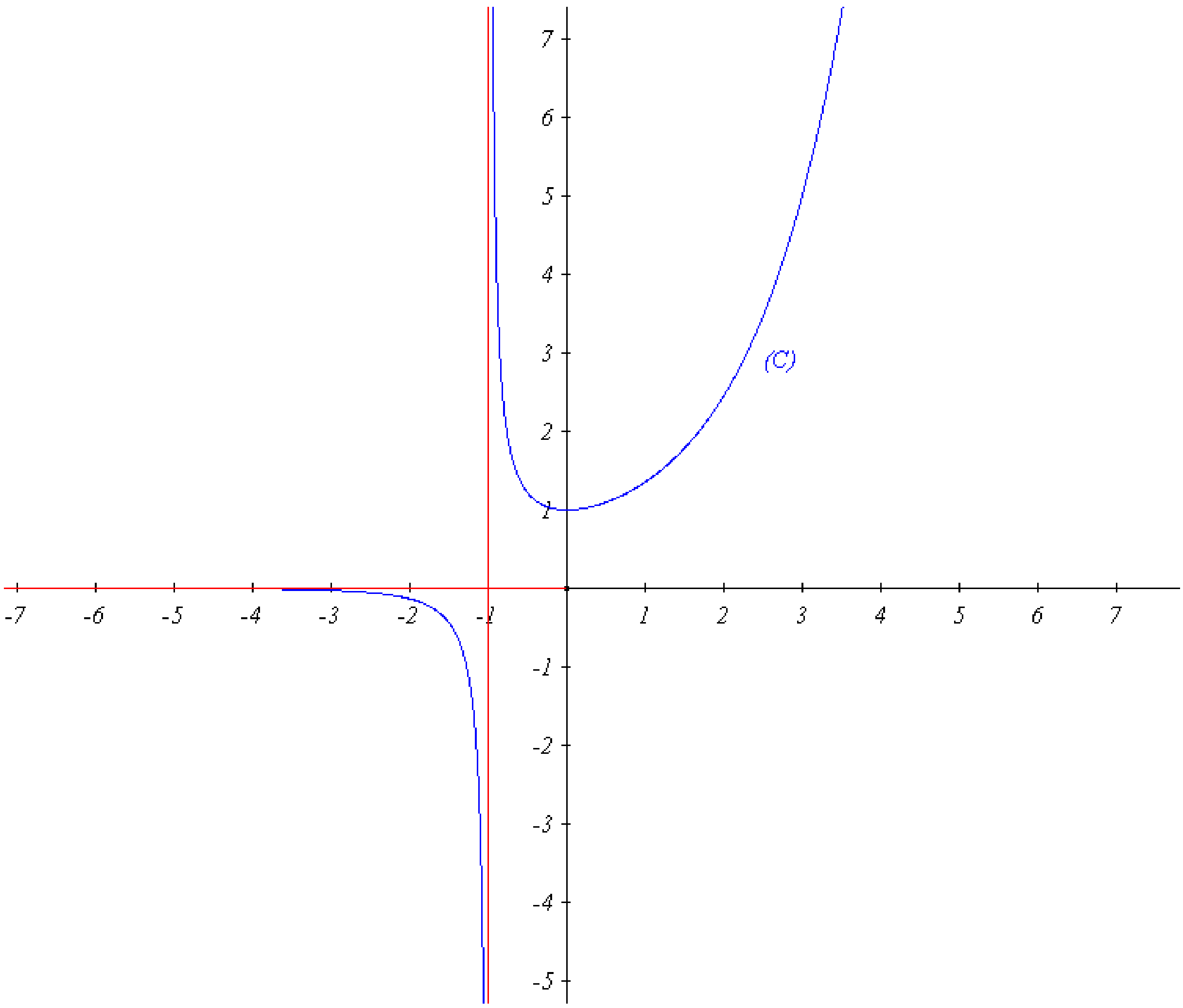
Signe de la dérivée

$f'(x)$ est du signe de x , puisque $e^x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ sur $\mathbb{R} - \{-1\}$.

Tableau de Variation

x	$-\infty$			-1			0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$\Vert$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Courbe Représentative de f



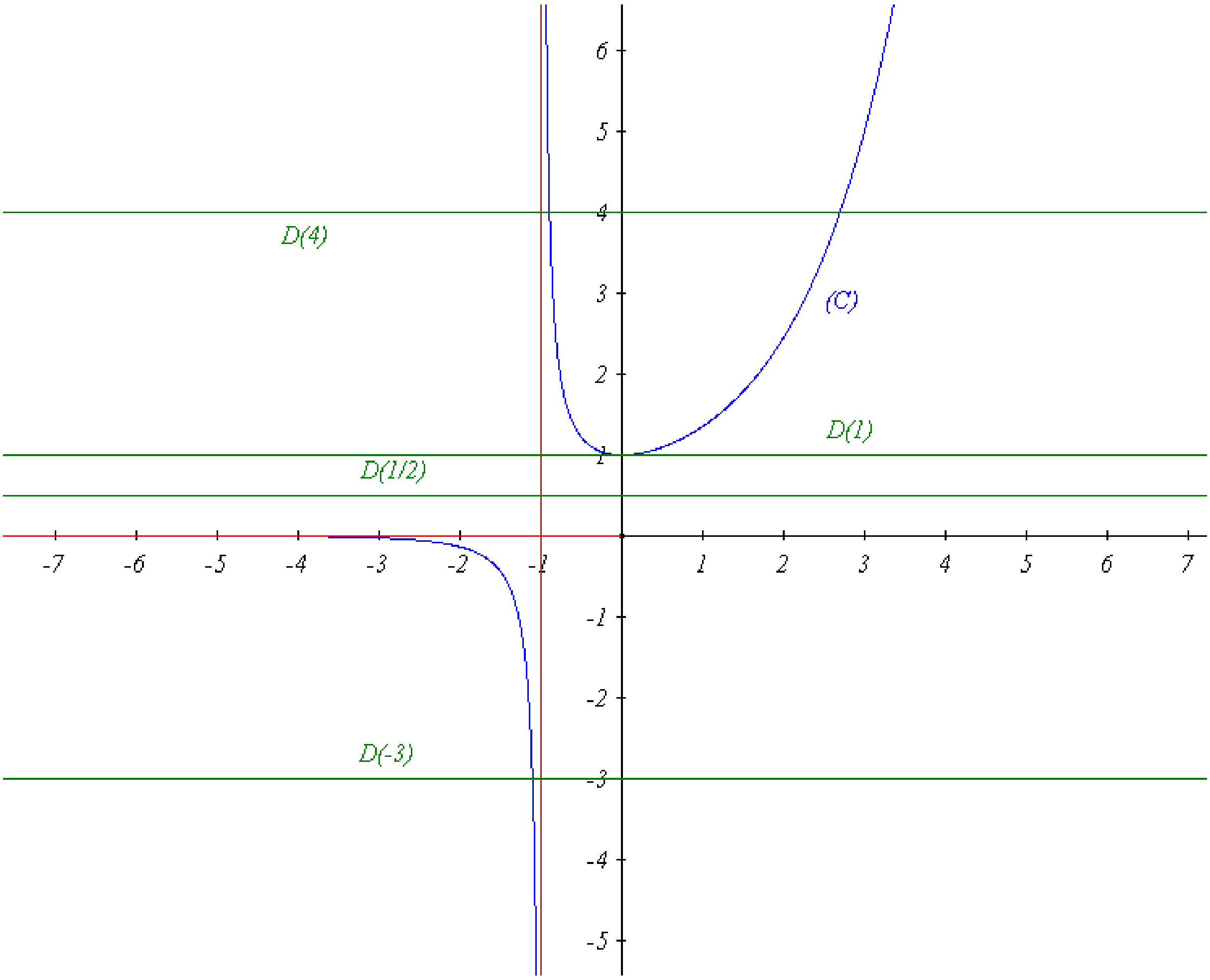
c) Discuter graphiquement, suivant m, le nombre et le signe des solutions x de l'équation (E_m).

Soit (D_m) la droite horizontale d'équation $y = m$, avec m réel quelconque.

x solution de $(E_m) \Leftrightarrow x$ solution de $f(x) = m \Leftrightarrow \begin{cases} M(x\,,y) \text{ avec } y = f(x) \text{ appartient à } (C) \\ M(x\,,y) \text{ avec } y = m \text{ appartient à } (D_m) \end{cases}$.

x solution de $(E_m) \Leftrightarrow x$ est une abscisse d'intersection de (C) avec (D_m).

D'après le graphique ci-dessous, on conclue :



- Si $m < 0 \Leftrightarrow (D_m)$ coupe (C) en un point $M(x_1\,,m)$ unique, tel que : $x_1 < -1$.
  - Si $m < 0$: (E_m) admet une solution unique $x_1 < -1$.

$0 \leq m < 1 \Leftrightarrow (D_m)$ coupe ne coupe pas (C).
  - Si $0 \leq m < 1$: (E_m) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$.

- Si $m = 1 \Leftrightarrow (D_1)$ est tangente à (C) en un point $M(x_1\,,m)$ unique, tel que : $x_1 = 0$.
  - Si $m = 1$: (E_1) admet une solution unique $x_1 = 0$ (racine double, car tangente).

- Si $m > 1 \Leftrightarrow (D_m)$ coupe (C) en deux points $M(x_1\,,m)$ et $M(x_2\,,m)$, tels que : $-1 < x_1 < 0 < x_2$.
  - Si $m > 1$: (E_m) admet deux solutions distinctes $-1 < x_1 < 0 < x_2$.