Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1/ $(z^2 + 3\sqrt{3}\, z + 9)(z^2 - 3\sqrt{3}\, z + 9) = 0$

Un produit est nul si et seulement si l'un ou l'autre de ses facteurs est nul :

a) $z^2 + 3\sqrt{3}\, z + 9 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 27 - 36 = -9 < 0$, d'où $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{-3\sqrt{3} - 3i}{2} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \\ z_2 = \overline{z_1} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i \end{cases}$.

b) $z^2 - 3\sqrt{3}\, z + 9 = 0$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 27 - 36 = -9 < 0$, d'où $\begin{cases} z_3 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{3\sqrt{3} - 3i}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \\ z_4 = \overline{z_3} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i \end{cases}$.

$S = \left\{ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \ ,\ -\dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i \ ,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i \ ,\ \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i \right\}$.

2/ $z^2 - 4\overline{z} - 5 = 0$

L'équation comporte simultanément des z et $\overline{z}$, ce qui impose de revenir à la forme $\begin{cases} z = x + iy \\ \overline{z} = x - iy \end{cases}$.

$z^2 - 4\overline{z} - 5 = 0 \Leftrightarrow (x + iy)^2 - 4(x - iy) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 2ixy - y^2) - 4(x - iy) - 5 = 0$.

On sépare en « partie réelle » et « partie imaginaire » :

$(x^2 - y^2 - 4x - 5) + i(2xy + 4y) = 0$.

Un nombre complexe ne peut être nul que si ses parties réelles et imaginaires sont simultanément nulles
$z = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}\,(z) = 0$ et $\mathrm{Im}\,(z) = 0$

D'où : $\begin{cases} x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0 \\ 2xy + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 - 4x = 0 \\ 2y(x + 2) = 0 \end{cases}$.

$2y(x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \underline{\text{ou}} \\ x = -2 \end{cases}$.

a) $y = 0$ reporté dans $x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0$ donne $x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \text{ou} \\ x = 5 \end{cases}$.

On déduit deux premiers couples solutions $(x , y) = (-1 , 0)$ et $(x , y) = (5 , 0)$,

Soit : $z_1 = -1$ et $z_2 = +5$.

b) $x = -2$ reporté dans $x^2 - y^2 - 4x - 5 = 0$ donne $-y^2 + 7 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\sqrt{7} \\ y = \sqrt{7} \end{cases}$.

On déduit deux autres couples solutions $(x , y) = (-2 , -\sqrt{7})$ et $(x , y) = (-2 , \sqrt{7})$,

Soit : $z_3 = -2 - i\sqrt{7}$ et $z_4 = -2 + i\sqrt{7}$.

D'où : $S = \{-1 , +5 , -2 + i\sqrt{7} , -2 - i\sqrt{7} \}$.

3/ $z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = 0$ (On remarquera que $2i$ est une racine de l'équation)

Vérifions que $z = 2i$ est solution de l'équation : $z = 2i \Rightarrow z^2 = -4$ et $z^3 = -8i$.

On reporte dans l'équation :

$-8i - 2(\sqrt{3} + i)(-4) + 4(1 + i\sqrt{3})(2i) - 8i = -8i + 8\sqrt{3} + 8i + 8i - 8\sqrt{3} - 8i = 0$!!!

> Si un polynôme $P(x)$ s'annule en $x = a$, alors $x - a$ est factorisable , d'où :
>
> $P(a) = 0 \Rightarrow P(x) = (x - a).Q(x)$ avec $\deg Q = (\deg P) - 1$.

$P(2i) = 0 \Rightarrow z - 2i$ est factorisable et $P(z) = (z - 2i).Q(z)$ avec $Q(z) = Az^2 + Bz + C$.

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = (z - 2i)(Az^2 + Bz + C)$.

On développe pour ensuite *identifier* les polynômes (même coefficient pour chaque degré) :

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = Az^3 + Bz^2 + Cz - 2Aiz^2 - 2Biz - 2Ci$,

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = Az^3 + (B - 2Ai)\, z^2 + (C - 2Bi)\, z - 2Ci$.

D'où : $\begin{cases} A = 1 \\ B - 2Ai = -2(\sqrt{3} + i) = -2\sqrt{3} - 2i \\ C - 2Bi = 4(1 + i\sqrt{3}) = 4 + 4i\sqrt{3} \\ -2Ci = -8i \end{cases}$ dont on déduit $\begin{cases} A = 1 \\ B = -2\sqrt{3} \\ C = 4 \end{cases}$.

En conséquence :

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = (z - 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4)$.

$z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})\, z - 8i = 0$ équivaut à :

$$z - 2i = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = 2i \\ z^2 - 2\sqrt{3}\, z + 4 = 0 \text{ , } \Delta = -4 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_2 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \dfrac{2\sqrt{3} - 2i}{2} = \sqrt{3} - i \\ z_3 = \overline{z_2} = \sqrt{3} + i \end{cases} \end{cases} .$$

D'où : $S = \{2i \ , \ \sqrt{3} - i \ , \sqrt{3} + i \}$.