Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1/ $2z = i - 1$

$$2z = -1 + i \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i .$$

2/ $\overline{z} + 1 + i = i\overline{z} + 3$

$$\overline{z} + 1 + i = i\overline{z} + 3 \Leftrightarrow \overline{z} - i\overline{z} = 2 - i \Leftrightarrow \overline{z}(1 - i) = 2 - i ,$$

$$\overline{z} = \frac{2 - i}{1 - i} = \frac{(2 - i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2 + 2i - i - i^2}{1 + 1} = \frac{2 + 2i - i + 1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i .$$

D'où : $z = \overline{\overline{z}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$.

3/ $\dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$

$\dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i$ impose $\overline{z} + 1 \neq 0$, soit $\overline{z} \neq -1$ d'où $z \neq -1$.

$\dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z} + 1} = i \Rightarrow \overline{z} - 1 = i(\overline{z} + 1)$ soit $\overline{z} - 1 = i\overline{z} + i$,

D'où : $\overline{z} - i\overline{z} = 1 + i \Leftrightarrow \overline{z}(1 - i) = 1 + i \Leftrightarrow \overline{z} = \dfrac{1 + i}{1 - i}$,

$\overline{z} = \dfrac{(1 + i)^2}{(1 - i)(1 + i)} = \dfrac{1 + 2i - 1}{1^2 + 1^2} = \dfrac{2i}{2} = i$, d'où $z = \overline{\overline{z}} = -i$.

4/ $z^2 = -9$

$$z^2 = -9 \Leftrightarrow z^2 = 9i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 3i \\ \text{ou} \\ z = -3i \end{cases} .$$

5/ $z^2 = -\sqrt{2}$

$$z^2 = -\sqrt{2} \Leftrightarrow z^2 = i^2\sqrt{2} \Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{\sqrt{2}} = i(2^{1/2})^{1/2} = (2^{1/4)})\, i \\ \text{ou} \\ z = -i\sqrt{\sqrt{2}} = -i(2^{1/2})^{1/2} = -(2^{1/4})\, i \end{cases} .$$

6/ $z^4 = 4$

$$z^4 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = \sqrt{2} \\ \text{ou} \\ z = -\sqrt{2} \end{cases} \\ \text{ou} \\ z^2 = -2 = 2i^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = i\sqrt{2} \\ \text{ou} \\ z = -i\sqrt{2} \end{cases} \end{cases} .$$