Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x + 1$

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x + 1 = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - (x-1)$ indéterminé, de forme $\infty - \infty$.

Factorisons e^x : $e^x - x + 1 = e^x(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x})$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

De même : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$.

En conséquence : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x(1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x + 1 = +\infty$.

b) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x + 1$

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x-1) = -\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - x + 1 = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - (x-1) = +\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 5e^x + 1$

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 5e^x + 1$ indéterminé, de forme $\infty - \infty$.

Factorisons e^{2x} : $e^{2x} - 5e^x + 1 = e^{2x}(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}})$.

Sachant $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{2x}} = 0$.

En conséquence : $\lim\limits_{x \to +\infty} (1 - \frac{5}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}(1 - \frac{5}{e^x} + \frac{1}{e^{2x}}) = +\infty$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 5e^x + 1 = +\infty$.

d) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 5e^x + 1$

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$.

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} - 5e^x + 1 = 1$.

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$

On sait $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}$ indéterminé de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Factorisons e^x au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{e^x - 2}{e^x + 1} = \frac{e^x(1 - \frac{2}{e^x})}{e^x(1 + \frac{1}{e^x})} = \frac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} .$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{e^x} = 0$, on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \frac{2}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = 1$.

f) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1}}$

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x - 2}{e^x + 1} = \dfrac{-2}{1} = -2$.