Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} e^{x-y} = e \\ \dfrac{e^{2y}}{e^x} = \dfrac{1}{e^2} \end{cases}$.

On sait que : $e = e^1$.

Par ailleurs, $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$.

En conséquence : $e^{x-y} = e \Leftrightarrow x - y = 1$.

$\dfrac{e^{2y}}{e^x} = \dfrac{1}{e^2} \Leftrightarrow e^{2y} \times e^2 = e^x$.

On sait que : $e^A \times e^B = e^{A+B}$.

$e^{2y} \times e^2 = e^x \Leftrightarrow e^{2y+2} = e^x \Leftrightarrow 2y + 2 = x$.

Le système devient : $\begin{cases} x - y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y = -1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Par addition, on obtient : $-y = 1$, soit $y = -1$.

On reporte $y = -1$ dans $x = 2y + 2$, d'où : 0 .

Conclusion : Couple solution unique $(x , y) = (0 , -1)$.

b) $\begin{cases} e^{x+1} - e^{-y} = 0 \\ e^x + e^{-y-1} = 2 \end{cases}$.

$e^{x+1} - e^{-y} = 0 \Leftrightarrow e^{x+1} = e^{-y} \Leftrightarrow x + 1 = -y$.

On déduit : $y = -x - 1$ que l'on reporte dans la seconde équation :

$e^x + e^{-y-1} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{-(-x-1)-1} = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{x+1-1} = 2$,

$e^x + e^x = 2 \Leftrightarrow 2e^x = 2 \Leftrightarrow e^x = 1$.

On sait que $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

On reporte dans $y = -x - 1$, d'où : $y = -1$.

Conclusion : Couple solution unique $(x , y) = (0 , -1)$.