On désigne par f la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par : $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\ ,\ \vec{i}\ ,\ \vec{j})$
(unité graphique : 5 cm).

1/ Vérifier que, pour tout nombre réel x : $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$.

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{e^x(1+e^{-x})} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{e^x+1} .$$

Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

On sait $\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (e^x+1) = 1 \end{array}\right\}$, d'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{1+e^x} = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Le graphe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $-\infty$.

On sait $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$, soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^{-x}} = 1$.

Le graphe présente une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x . En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

f est partout définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, de dénominateur non nul, puisque $e^u > 0$, pour tout u réel.

$f = \dfrac{1}{u} \Rightarrow f' = -\dfrac{u'}{u^2}$ et $(e^u)' = u'.e^u$. D'où : $f'(x) = \left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}\right)' = -\dfrac{-e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$.

Sachant $e^u > 0$, quel que soit u réel, on déduit : $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$. La fonction f est partout croissante.

Dresser le tableau de variations de f .

On peut ajouter comme valeur particulière $f(0) = \dfrac{1}{1+e^0} = \dfrac{1}{2}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	|	+	
$f(x)$	0	↗	1/2	↗	1

On peut vérifier que la courbe admet pour centre de symétrie le point $A(0\ ;\ \dfrac{1}{2})$.

Il suffit, pour montrer que $A(a\ ,\ b)$ est centre de symétrie, de prouver : $f(a+h) + f(a-h) = 2b$, $\forall h \in \mathbb{R}$.

$$f(0+h) + f(0-h) = f(h) + f(-h) = \frac{1}{1+e^{-h}} + \frac{1}{1+e^h} = \frac{e^h}{e^h+1} + \frac{1}{1+e^h} = \frac{e^h+1}{e^h+1} = 1 = 2b .$$

Tracer la courbe (*C*) et ses asymptotes éventuelles dans le repère $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.