Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\boldsymbol{e^x - e^{-x} = 0}$

<u>$1^{\text{ère}}$ méthode (à privilégier) :</u>

On sait que la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$, continue et dérivable, strictement croissante.

En conséquence :

e^A est défini (calculable) dès que A l'est ,
e^x conserve les ordres : $\begin{cases} e^A < e^B \iff A < B \text{ (croissance stricte)} \\ e^A = e^B \iff A = B \text{ (injectivité)} \end{cases}$.

$e^x - e^{-x} = 0 \iff e^x = e^{-x} \iff x = -x$ d'après la croissance stricte de l'exponentielle.

$x = -x \iff 2x = 0 \iff x = 0$.

D'où : $S = \{0\}$.

<u>$2^{\text{ème}}$ méthode (trop longue dans ce cas particulier) :</u>

Procédons au changement de variable $X = e^x$.

On sait qu'alors : $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} = \dfrac{1}{X}$ (on peut remarquer que $e^x > 0$, donc non nul, autorise l'écriture $\dfrac{1}{X}$).

$e^x - e^{-x} = 0 \iff X - \dfrac{1}{X} = 0 \iff \dfrac{X^2 - 1}{X} = 0 \iff X^2 - 1 = 0 \iff X^2 = 1 \iff X = -1$ ou $X = +1$.

- Si $X = -1$, soit $e^x = -1$. Il n'y a pas de solution x , puisque qu'une exponentielle ne prend que des valeurs strictement positives.

Une exponentielle est toujours strictement positive , soit $e^A > 0$, quel que soit $A \in \mathbb{R}$

- Si $X = +1$; soit $e^x = +1$:

Comme $e^0 = 1$, l'équation équivaut à $e^x = e^0$, soit $x = 0$ puisque l'exponentielle est injective.

D'où : $S = \{0\}$.

b) $\boldsymbol{e^x + e^{-x} = 0}$

On sait que $e^A > 0$ pour tout A réel, donc l'équation $e^x + e^{-x} = 0$ n'a pas de solution, puisque la somme de deux quantités strictement positives ne peut être nulle.

D'où : $S = \varnothing$.

c) $\boldsymbol{e^{-x+4} = (e^{-x})^4}$

Pas de problème de domaine de définition ($-x + 4$ et $-x$ toujours calculables).

Les exponentielles respectent les formules des puissances :
$e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^n = e^{na}$

$e^{-x+4} = (e^{-x})^4 \Leftrightarrow e^{-x+4} = e^{-4x} \Leftrightarrow -x + 4 = -4x$ puisque $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$.

$-x + 4 = -4x \Leftrightarrow 3x = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$.

D'où : $S = \{-\frac{4}{3}\}$.

d) e^{x^2-4} **= $(e^{x+2})^2$**

Pas de problème de domaine de définition ($-x + 4$ et $-x$ toujours calculables).

$e^{x^2-4} = (e^{x+2})^2 \Leftrightarrow e^{x^2-4} = e^{2(x+2)}$ puisque $(e^A)^2 = e^{2A}$.

On déduit : $x^2 - 4 = 2(x + 2)$ puisque $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$.

D'où : $x^2 - 2x - 8 = 0$ avec $\Delta = b^2 - 4ac = 36 > 0$.

Les racines sont : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -2$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = +4$.

D'où : $S = \{-2 , +4\}$.