Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = x - \dfrac{2}{e^x - 1}$.

1/ Etudier son comportement aux bornes du domaine de définition.

- Soit $x \to -\infty$: Alors $\begin{cases} x \to -\infty \\ e^x \to 0 \Rightarrow e^x - 1 \to -1 \Rightarrow \dfrac{2}{e^x - 1} \to +2 \end{cases}$.

Par addition, on conclue $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

- Soit $x \to +\infty$: Alors $\begin{cases} x \to +\infty \\ e^x \to +\infty \Rightarrow e^x - 1 \to +\infty \Rightarrow \dfrac{2}{e^x - 1} \to 0 \end{cases}$.

Par addition, on conclue $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

- Soit $x \to 0^-$: Alors $\begin{cases} x \to 0 \\ e^x \to 1^- \Rightarrow e^x - 1 \to 0^- \Rightarrow \dfrac{2}{e^x - 1} \to -\infty \end{cases}$.

Par soustraction, on conclue $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = +\infty$.

- Soit $x \to 0^+$: Alors $\begin{cases} x \to 0 \\ e^x \to 1^+ \Rightarrow e^x - 1 \to 0^+ \Rightarrow \dfrac{2}{e^x - 1} \to +\infty \end{cases}$.

Par soustraction, on conclue $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$.

La courbe (C) présente une asymptote verticale, d'équation $x = 0$.

2/ Montrer que la droite (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique vers $-\infty$ à la courbe représentative (C) de la fonction f.

On étudie, en fonction de x, la <u>limite</u> vers $-\infty$ de l'écart vertical *algébrique* $E(x) = f(x) - x$ qui mène de (D) à (C) .

$E(x) = f(x) - (x + 2) = -\dfrac{2}{e^x - 1} - 2 = \dfrac{-2 - 2(e^x - 1)}{e^x - 1} = -\dfrac{2e^x}{e^x - 1}$.

Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, on déduit : $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = 0$.

Ceci prouve que (D) d'équation $y = x + 2$ est asymptote oblique à (C) .

3/ Etudier les positions relatives de (D) et (C) sur $]-\infty , 0[$.

On étudie, en fonction de x, le <u>signe</u> de l'écart vertical *algébrique* $E(x) = f(x) - x$ qui mène de (D) à (C) .

$E(x) = f(x) - x = -\dfrac{2}{e^x - 1}$, or la fonction exponentielle, *continue, strictement croissante, <u>conserve les ordres</u>* .

D'où $x < 0 \Rightarrow e^x < e^0 \Rightarrow e^x < 1 \Rightarrow e^x - 1 < 0$, d'où : $E(x) = -\dfrac{2e^x}{e^x - 1} > 0$.

On déduit que (C) est partout située au dessus de (D) sur $]-\infty ; 0[$.

4/ Montrer que la droite (D') d'équation $y = x$ est asymptote oblique vers $+\infty$ à la courbe représentative (C) de la fonction f.

On étudie, en fonction de x, la <u>limite</u> vers $+\infty$ de l'écart vertical *algébrique* $E(x) = f(x) - x$ qui mène de (D') à (C) .

$E(x) = f(x) - x = -\dfrac{2}{e^x - 1}$, or on a vu précédemment que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x - 1} = 0$.

Ceci prouve que (D') d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) .

5/ Etudier les positions relatives de (D') et (C) sur $]0\,,+\infty[$.

On étudie, en fonction de x , le <u>signe</u> de l'écart vertical *algébrique* $E(x) = f(x) - x$ qui mène de (D') à (C) .

$E(x) = f(x) - x = -\dfrac{2}{e^x - 1}$, or la fonction exponentielle, *continue, strictement croissante, conserve les ordres* .

D'où $x > 0 \Rightarrow e^x > e^0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow e^x - 1 > 0$, soit $E(x) = -\dfrac{2}{e^x - 1} < 0$.

On déduit que (C) est partout située sous (D') sur $]0\,;+\infty[$.

6/ Etudier les variations de f et donner son tableau de variation.

f est une fonction définie, continue et dérivable sur $]-\infty\,;0[$.

Dérivée :

On sait que $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$. D'où : $f(x) = x - \dfrac{2}{e^x - 1} \Rightarrow f'(x) = 1 + \dfrac{2(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2}$.

On sait que $(e^x)' = e^x$: D'où : $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

Etudions le signe de la dérivée $f'(x) = 1 + \dfrac{2e^x}{(e^x - 1)^2}$.

On sait que $e^x > 0$ sur IR , ce qui permet de conclure $f'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;0[$. La fonction f est partout croissante.

Tableau de variation :

x	$-\infty$			0			$+\infty$
$f'(x)$		+		$\|\|$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$	$\|\|$	$-\infty$	↗	$+\infty$

7/ Tracer dans un repère orthonormal, sur un même graphique, les droites (D) , (D') et la courbe (C) .