Soit le nombre complexe $Z = -3(\sin\theta - i\cos\theta)$, avec θ réel quelconque.

Déterminer son écriture trigonométrique.

Le piège serait de trop rapidement identifier Z à une écriture $\rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$:

a) En concluant $\rho = |Z| = -3$:

Erreur facilement évitable, un *module* $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ ne pouvant qu'être positif.

b) En concluant $\alpha = \text{Arg}(Z) = \theta$ ou $-\theta$ rapidement :

Erreur prévisible car l'écriture attendue $Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ doit toujours :

- Avoir un <u>cosinus</u> en partie réelle et un <u>sinus</u> en partie imaginaire,
- Avoir le signe + entre ces deux termes.

<u>1ère méthode : En se rapprochant de la forme attendue, par étapes successives</u>

Méthode assez simple et rapide, dès que l'on a acquis une certaine expertise :

- On réintègre le signe – dans le corps du complexe, afin d'obtenir un *module* positif :

$Z = 3(-\sin\theta + i\cos\theta)$.

- On cherche un angle α , en fonction de θ dont les lignes trigonométriques vérifient $\begin{cases} \cos\alpha = -\sin\theta \\ \sin\alpha = \cos\theta \end{cases}$.

Il est hasardeux d'apprendre par cœur de tels cas « d'angles associés ». Mieux vaut se ramener, par étapes aux formules les plus courantes : *Un simple dessin sur un cercle trigonométrique suffit à les retrouver et les apprendre.*

Lorsque deux angles ne mélangent pas leurs cosinus et sinus : faire intervenir l'opposé de l'angle et/ou π :

$\begin{cases} \cos(-a) = \cos a \\ \sin(-a) = \sin a \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(\pi - a) = -\cos a \\ \sin(\pi - a) = \sin a \end{cases}$ dont on déduit $\begin{cases} \cos(\pi + a) = -\cos a \\ \sin(\pi + a) = -\sin a \end{cases}$.

Lorsque deux angles mélangent leurs cosinus et sinus : faire intervenir $\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a \end{cases} \quad \text{dont on déduit} \quad \begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin a \\ \sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos a \end{cases} .$$

Cette dernière formule est la plus dangereuse, du fait de la présence du "– " devant $\sin a$.

Il est prudent de vérifier sur un dessin.

Retour à l'exercice : $\begin{cases} \cos\alpha = -\sin\theta \\ \sin\alpha = \cos\theta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \end{cases}$, d'où : $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$.

Conclusion : $Z = -3(\sin\theta - i\cos\theta)$ s'écrit trigonométriquement $Z = 3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$.

2ème méthode : Procédure théorique habituelle pour ce genre de question

Méthode efficace, parfois un peu lourde :

$Z = -3(\sin\theta - i\cos\theta) = -3\sin\theta + 3\cos\theta = a + ib \Rightarrow \begin{cases} a = -3\sin\theta \\ b = 3\cos\theta \end{cases}$.

$\rho = |Z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3\sin\theta)^2 + (3\cos\theta)^2} = \sqrt{9(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \sqrt{9} = 3$.

$\alpha = \mathrm{Arg}(Z)$ vérifie $\left\{ \begin{array}{c} \cos\alpha = \dfrac{a}{\rho} = \dfrac{-3\sin\theta}{3} = -\sin\theta \\ \sin\alpha = \dfrac{b}{\rho} = \dfrac{3\cos\theta}{3} = \cos\theta \end{array} \right\}$, soit $\begin{cases} \cos\alpha = -\sin\theta \\ \sin\alpha = \cos\theta \end{cases}$.

D'après le raisonnement précédent sur les angles associés : $\begin{cases} \cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \\ \sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) \end{cases}$, d'où : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \theta$.

Conclusion : $Z = -3(\sin\theta - i\cos\theta) = 3\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right)\right]$.

$|Z| = 3$ et $\mathrm{Arg}(Z) = \left(\dfrac{\pi}{2} + \theta\right) + 2k\pi$.