La fonction f est définie sur $[0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}$.

1/ Montrer que $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$.

$$x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1} = x + 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = x + 1 - \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1) - (\sqrt{x}-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 1 - \sqrt{x} + 1}{x-1}$$

On conclue : $x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1} = f(x)$.

2/ Déterminer la limite de f en $+\infty$.

$$\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x}+1) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = 0 \end{array}\right\}$$ d'où, par addition : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3/ Déterminer un réel a tel que la fonction définie par :

$$\left\{\begin{array}{l} g(x) = f(x) \text{ pour } x \in [0\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[\\ \text{et} \\ g(1) = a \end{array}\right.$$ **, soit continue en 1 (*prolongement par continuité en $x = 1$*).**

Rappel : Pour que deux fonctions portent le même nom (fonctions identiques) , il faut qu'elle donne le même résultat pour tout x de leur domaine, soit $f(x) = g(x)$, mais <u>*le domaine doit être le même*</u>*.*

On cherche donc une valeur à donner à f en $x = 1$, pour qu'après cet ajout, la fonction f soit définie et continue sur $[0\,;+\infty[$ (*prolongement par continuité*) .

L'ajout d'une valeur pour f en 1 , impose donc de changer f de nom, d'où l'appellation g .

On remarque que f est <u>indéterminée</u> en $x = 1$, puisque $f(1) = \dfrac{0}{0}$.

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \left(x + 1 - \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right) = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

En posant $g(1) = 2$, on obtient $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = \lim\limits_{x \to 1} f(x) = g(1)$, donc g est bien continue en $x = 2$.

En posant $g(1) = 2$ et $g(x) = f(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x}}{x-1}$ pour $x \in [0\,;1[\,\cup\,]1\,;+\infty[$, on a purement et simplement remplacé la fonction f par la fonction $g : x \to g(x) = x + 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$, définie et continue sur $[0\,;+\infty[$.

Pour simplifier :

On a prolongé f en $x = 1$ <u>*par continuité*</u> *en posant $f(1) = 2$, là où f était initialement indéterminée.*