Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

1-a) Calculer la dérivée de *g* sur ℝ.

$(uv)' = u'v + v'u$, d'où : $g'(x) = 1.e^x + (x-1)e^x$, soit $g'(x) = x.e^x$.

b) Déterminer les limites de *g* en -∞ et +∞ .

- On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x.e^x - e^x - 1) = -1$.
- On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-1) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [(x-1).e^x - 1] = +\infty$.

c) Etudier les variations de *g* et dresser son tableau de variations.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x.e^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$, avec $g(0) = -e^0 - 1 = -2$.

Comme $e^x > 0$ sur ℝ , on déduit que $g'(x)$ est du signe de x .

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		–	0	+	
$g(x)$	-1	↘	-2	↗	$+\infty$

d) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur ℝ .

- La fonction g est *continue*, strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$, telle que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -1$ et $g(0) = -2$.

On déduit $-2 \leq g(x) < -1$ pour tout $x \leq 0$. La fonction g est strictement négative sur $]-\infty ; 0]$.

- La fonction g est *continue*, strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, telle que $g(0) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

D'après le *théorème de la valeur intermédiaire*, on déduit l'existence de $\alpha > 0$ unique, tel que $g(\alpha) = 0$.

Donner un encadrement de α à 10^{-2} près.

La calculatrice permet d'affirmer $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.

e) En déduire le signe de *g* sur ℝ .

En exploitant la décroissance de g sur $]-\infty ; 0[$, puis la croissance de g sur $[0 ; +\infty[$, on peut conclure :

$$\begin{cases} g(x) < 0 \text{ sur }]-\infty , \alpha[\\ g(\alpha) = 0 \\ g(\alpha) > 0 \text{ sur }]\alpha , +\infty[\end{cases} .$$

2/ Soit *f* la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1}$.

On remarquera en préambule que f est définie, continue et dérivable sur ℝ , comme rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur ℝ , et de dénominateur strictement positif.

a) Etudier les limites de *f* en -∞ et +∞ .

- $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x + 1} = -\infty$.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (e^x + 1) = +\infty$, d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ de forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$.

Levons l'indétermination :

$f(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} = \dfrac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, dont on déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

Préciser l'asymptote en $+\infty$.

La fonction f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ vers $+\infty$.

b) Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote à f en $-\infty$.

Soit $E(x) = f(x) - x$ l'écart *algébrique* de la droite $y = x$ vers la courbe C représentative de f .

$E(x) = \dfrac{x}{e^x + 1} - x = \dfrac{x - x(e^x + 1)}{e^x + 1} = -\dfrac{x.e^x}{e^x + 1}$.

On sait $\lim\limits_{x \to -\infty} x.e^x = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (e^x + 1) = 1$, d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = 0$.

La droite $y = x$ est asymptote oblique à C vers $-\infty$.

c) Calculer la dérivée de f sur $\mathbb{R}$.

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{1.(e^x + 1) - x.e^x}{(e^x + 1)^2} = -\dfrac{(x - 1)e^x - 1}{(e^x + 1)^2} = -\dfrac{g(x)}{(e^x + 1)^2}$.

d) Etudier le signe de f' sur $\mathbb{R}$. En déduire les variations de f et établir son tableau de variations.

Le signe de $f'(x)$ est l'opposé de celui de $g(x)$ étudié au 1-e).

D'où : $\begin{cases} f'(x) > 0 \text{ sur }]-\infty , \alpha[\Leftrightarrow f \text{ strictement croissante} \\ f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{maximum de } f \text{ en } \alpha \\ f'(\alpha) < 0 \text{ sur }]\alpha , +\infty[\Leftrightarrow f \text{ strictement décroissante} \end{cases}$.

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0

e) Tracer la courbe C représentative de f dans un repère orthonormal d'unité graphique 2 cm.

En posant $\alpha = 1{,}275$, la calculatrice donne $f(\alpha) = 0{,}278$.