Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25% chez le premier fournisseur et 75% chez le second.

La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2% chez le second.

On note :

- D l'évènement : « le composant est défectueux » ;

- F_1 l'évènement : «le composant provient de chez le premier fournisseur » ;

- F_2 l'évènement : «le composant provient de chez le second fournisseur » .

1-a) Dessiner un arbre pondéré.

$$\bullet \begin{cases} \xrightarrow{0{,}25} F_1 \begin{cases} \xrightarrow{0{,}03} D \\ \xrightarrow{0{,}97} \overline{D} \end{cases} \\ \xrightarrow{0{,}75} F_2 \begin{cases} \xrightarrow{0{,}02} D \\ \xrightarrow{0{,}98} \overline{D} \end{cases} \end{cases}$$

b) Calculer $p(D \cap F_1)$ puis démontrer que $p(D) = 0{,}00225$.

$p(D \cap F_1) = p(F_1) \times p_{F1}(D) = 0{,}25 \times 0{,}03 = 0{,}0075$.

Les évènements F_1 et F_2 sont contraires l'un de l'autre donc *incompatibles* :

$p(D) = p(D \cap F_1) + p(D \cap F_2) = p(F_1) \times p_{F1}(D) + p(F_2) \times p_{F2}(D) = 0{,}25 \times 0{,}03 + 0{,}75 \times 0{,}02 = 0{,}0075 + 0{,}0150$,

$p(D) = 0{,}2225$.

c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne de chez le premier fournisseur.

$$p_D(F_1) = \frac{p(D \cap F_1)}{p(D)} = \frac{0{,}0075}{0{,}0225} = \frac{1}{3} = 0{,}3333 .$$

Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} *près.*

2/ Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?

Soit X le nombre de composants défectueux parmi les $n = 20$ composants achetés.

La probabilité qu'un composant soit défectueux est $p = 0{,}0225$.

X suit une *loi binomiale* $X = B(n, p)$, d'où : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$.

D'où : $p(X \geq 2) = 1 - [p(X = 0) + p(X = 1)] = 1 - \left(\binom{20}{0} (0{,}9775)^{20} + \binom{20}{1} (0{,}0225)\,(0{,}9775)^{19}\right) = 0{,}074$.

3/ La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X , qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ , avec λ réel strictement positif.

a) Sachant que $p(X > 5) = 0{,}325$, déterminer λ .

$p(X > a) = e^{-\lambda a}$, d'où : $e^{-5\lambda} = 0{,}325 \Leftrightarrow \lambda = -\frac{1}{5} \ln(0{,}325) = 0{,}2248$.

Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0{,}225$.

b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?

$p(X < 8) = 1 - p(X > 8) = 1 - e^{-8\lambda} = 1 - e^{-8(0{,}225)} = 1 - e^{-1{,}8} = 0{,}835$.

$p(X > 8) = e^{-8\lambda} = e^{-1{,}8} = 0{,}165$.

c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

$$p_{X>3}(X > 8) = \frac{p((X > 3) \text{ et } (X > 8))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 8)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-8\lambda}}{e^{-3\lambda}} = e^{-5\lambda} = e^{-1{,}125} = 0{,}325 .$$

On remarquera que l'on retrouve la propriété de la loi <u>*sans vieillissement*</u> *qui précise que la probabilité d'une durée de vie supérieure à* 8 *ans, sachant que l'on a déjà vécu au moins* 3 *ans, est égale à la probabilité de vivre au moins* 5 *ans.*