Un tiroir contient, pêle-mêle, 5 paires de chaussures noires, 3 paires de chaussures vertes et 2 paires de chaussures rouges. Les chaussures sont indiscernables au toucher, donc il est impossible d'en détecter la couleur, le modèle ou même le pied correspondant.

Dans toutes les questions, les résultats seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1/ On tire simultanément deux chaussures au hasard et on admet l'équiprobabilité de chaque tirage.

a) Calculer la probabilité de l'évènement A : "Tirer deux chaussures de même couleur".

L'évènement A se décompose en trois sous-évènements *incompatibles*, A_1 : "Tirage de 2 chaussures Noires", A_2 : "Tirage de 2 chaussures Vertes", A_3 : "Tirage de 2 chaussures Rouges".

$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3)$

<u>1ère méthode (avec les combinaisons) :</u>

L'univers Ω des résultats possibles (ensemble des tirages simultanés de 2 chaussures parmi 20 possibles) a pour cardinal $N = \binom{20}{2} = \frac{20\times19}{2} = 190$.

Le sous-univers A_1 des résultats favorables à A_1 (ensemble des tirages simultanés de 2 chaussures Noires) admet pour cardinal $n_1 = \binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2} = 45$.

Le sous-univers A_2 des résultats favorables à A_2 (ensemble des tirages simultanés de 2 chaussures Vertes) admet pour cardinal $n_2 = \binom{6}{2} = \frac{6\times5}{2} = 15$.

Le sous-univers A_3 des résultats favorables à A_3 (ensemble des tirages simultanés de 2 chaussures Rouges) admet pour cardinal $n_2 = \binom{4}{2} = \frac{4\times3}{2} = 6$.

$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{N} = \frac{66}{190} = \frac{33}{95}$.

<u>2ème méthode (en décomposant en évènements successifs) :</u>

Un *tirage simultané* est équivalent à un *tirage successif* , sous réserves que celui-ci soit *sans remise*, et que l'on ne tienne pas compte de l'ordre de sortie des chaussures, ce qui revient à accepter toutes les permutations de cet ordre.

A titre d'exemple, on notera $(R_1 ; N_2)$ l'évènement "Chaussure Rouge au 1er tirage puis chaussure Noire au 2nd tirage", d'où $p(R_1 ; N_2) = p(R_1)\times p_{R1}(N_2)$.

$p(A) = p(A_1) + p(A_2) + p(A_3) = p(N_1 ; N_2) + p(V_1 ; V_2) + p(R_1 ; R_2) = \frac{10}{20}\times\frac{9}{19} + \frac{6}{20}\times\frac{5}{19} + \frac{4}{20}\times\frac{3}{19} = \frac{132}{380} = \frac{33}{95}$.

b) Calculer la probabilité de l'évènement B : "Tirer un pied gauche et un pied droit".

L'évènement B se décompose en deux sous-évènements *incompatibles*, B_1 : "Tirage de 2 pieds gauche", B_2 : "Tirage de 2 pieds droit".

$p(B) = p(B_1) + p(B_2)$.

<u>1ère méthode (avec les combinaisons) :</u>

L'univers Ω des résultats possibles reste identique, de cardinal $N = \binom{20}{2} = \frac{20\times19}{2} = 190$.

Le sous-univers B_1 des résultats favorables à B_1 (ensemble des tirages simultanés de 2 pieds gauche) admet pour cardinal $n_1 = \binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2} = 45$.

Le sous-univers B_2 des résultats favorables à B_2 (ensemble des tirages simultanés de 2 pieds droit) admet le même cardinal $n_2 = \binom{10}{2} = \frac{10\times9}{2} = 45$.

$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{B}_2) = \frac{n_1 + n_2}{N} = \frac{90}{190} = \frac{9}{19}$.

<u>2ème méthode (en décomposant en évènements successifs) :</u>

A titre d'exemple, on notera $(\mathrm{D}_1 ; \mathrm{G}_2)$ l'évènement "Pied Droit au 1er tirage puis pied Gauche au 2nd tirage",
d'où $p(\mathrm{D}_1 ; \mathrm{G}_2) = p(\mathrm{D}_1)\times p_{\mathrm{D}1}(\mathrm{G}_2)$.

$p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{B}_1) + p(\mathrm{B}_2) = p(\mathrm{G}_1 ; \mathrm{G}_2) + p(\mathrm{D}_1 ; \mathrm{D}_2) = 2\, p(\mathrm{G}_1 ; \mathrm{G}_2) = 2\times\frac{10}{20}\times\frac{9}{19} = \frac{180}{380} = \frac{9}{19}$.

c) Calculer la probabilité de l'évènement C : "Tirer les deux chaussures d'un même modèle".

L'évènement C se décompose en dix sous-évènements *incompatibles*, C_k : "Tirage des 2 chaussures de la paire n°k " avec $1 \le k \le 10$. D'où : $p(\mathrm{C}) = 10\, p(\mathrm{C}_1)$.

<u>1ère méthode (avec les combinaisons) :</u>

L'univers Ω des résultats possibles reste identique, de cardinal $N = \binom{20}{2} = \frac{20\times19}{2} = 190$.

Le sous-univers C_1 des résultats favorables à C_1 (ensemble des tirages simultanés des 2 chaussures de la paire n°1) admet pour cardinal $n = \binom{2}{2} = 1$.

$p(\mathrm{C}) = 10\, p(\mathrm{C}_1) = 10\,\frac{n}{N} = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$.

<u>2ème méthode (en décomposant en évènements successifs) :</u>

A titre d'exemple, on notera $(\mathrm{P}_1 ; \mathrm{P}_2)$ l'évènement "Chaussure de la Paire n°1 au 1er tirage puis chaussure de la paire n°2 au 2nd tirage", d'où $p(\mathrm{P}_1 ; \mathrm{P}_2) = p(\mathrm{P}_1)\times p_{\mathrm{P}1}(\mathrm{P}_2)$.

$p(\mathrm{C}) = 10\, p(\mathrm{P}_1) = 10\times\frac{2}{20}\times\frac{1}{19} = \frac{20}{380} = \frac{1}{19}$.

2/ On ne conserve plus dans le tiroir qu'une seule paire de chaussures noires et une paire de chaussures rouges. On tire, successivement et sans remise, une chaussure du tiroir, jusqu'à ce que le tiroir soit vide.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la deuxième chaussure noire.

a) Déterminer les différentes valeurs possibles de X .

La deuxième chaussure noire ne peut être tirée qu'en position 2, 3 ou 4 , ensemble des valeurs possibles de X .

b) Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

$p(X = 2) = p(N_1 ; N_2) = \frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

$p(X = 3) = p(N_1 ; R_2 ; N_3) + p(R_1 ; N_2 ; N_3) = \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$p(X = 4) = p(N_1 ; R_1 ; R_2) + p(R_1 ; N_1 ; R_2) + p(R_1 ; R_2) = \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2} + \frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

On remarquera l'astuce qui fait limiter le tirages dès que l'objectif attendu est une certitude.

Ainsi : $p(R_1\ ;\ R_2) = p(R_1\ ;\ R_2\ ;\ N_1\ ;\ N_2) = \frac{2}{4}\times\frac{1}{3}\times\mathbf{\frac{2}{2}\times\frac{1}{1}} = \frac{2}{4}\times\frac{1}{3}$.

D'où la *loi de probabilité* de X :

x_i	2	3	4
p_i	1/6	1/3	1/2

Espérance Mathématique de X :

$E(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 = \frac{2}{6} + \frac{3}{3} + \frac{4}{2} = \frac{10}{3} \approx 3,33$.