Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O\,,\,\vec{i}\,,\,\vec{j})$.

Faire l'étude et tracer la courbe représentative (C) de la fonction $f : x \to f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$.

- *Domaine de Définition* :

$f(x)$ est calculable si et seulement si $x^2 - 5x + 4 \neq 0$, or ce trinôme admet pour racines $x = 1$ et $x = 4$.

La fonction f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{+1 \,;\, +4\}$.

- *Limites aux bornes du Domaine* :

- **Si $x \to \pm\infty$** : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4}$ est de forme indéterminée $\dfrac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \dfrac{x}{x(x - 5 + \frac{4}{x})} = \dfrac{1}{x - 5 + \frac{4}{x}}$ avec $\lim\limits_{x \to +-\infty} (x - 5) = \pm\infty$ et $\lim\limits_{x \to +-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

On déduit : $\lim\limits_{x \to +-\infty} f(x) = 0$. La courbe (C) admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

Pour étudier les limites de f autour de $+1$ et $+4$, utilisons le tableau de signes de $x^2 - 5x + 4$:

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x^2 - 5x + 4$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- **Si $x \to 1^-$ ($x \to 1$ et $x < 1$)** : $\left\{\begin{matrix} x \to 1 \\ x^2 - 5x + 4 \to 0^+ \end{matrix}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$.

- **Si $x \to 1^+$ ($x \to 1$ et $x > 1$)** : $\left\{\begin{matrix} x \to 1 \\ x^2 - 5x + 4 \to 0^- \end{matrix}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$.

La courbe (C) admet une première asymptote verticale d'équation $x = +1$.

De même :

- **Si $x \to 4^-$ ($x \to 4$ et $x < 4$)** : $\left\{\begin{matrix} x \to 4 \\ x^2 - 5x + 4 \to 0^- \end{matrix}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

- **Si $x \to 4^+$ ($x \to 4$ et $x > 4$)** : $\left\{\begin{matrix} x \to 4 \\ x^2 - 5x + 4 \to 0^+ \end{matrix}\right\}$ d'où $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$.

La courbe (C) admet une seconde asymptote verticale d'équation $x = +4$.

- *Dérivée* :

$f = \dfrac{u}{v} \Rightarrow f' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, soit $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 5x + 4} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1(x^2 - 5x + 4) - x(2x - 5)}{(x^2 - 5x + 4)^2} = \dfrac{-x^2 + 4}{(x^2 - 5x + 4)^2}$.

Signe de la dérivée :

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $-x^2 + 4$ qui admet pour racines -2 et $+2$.

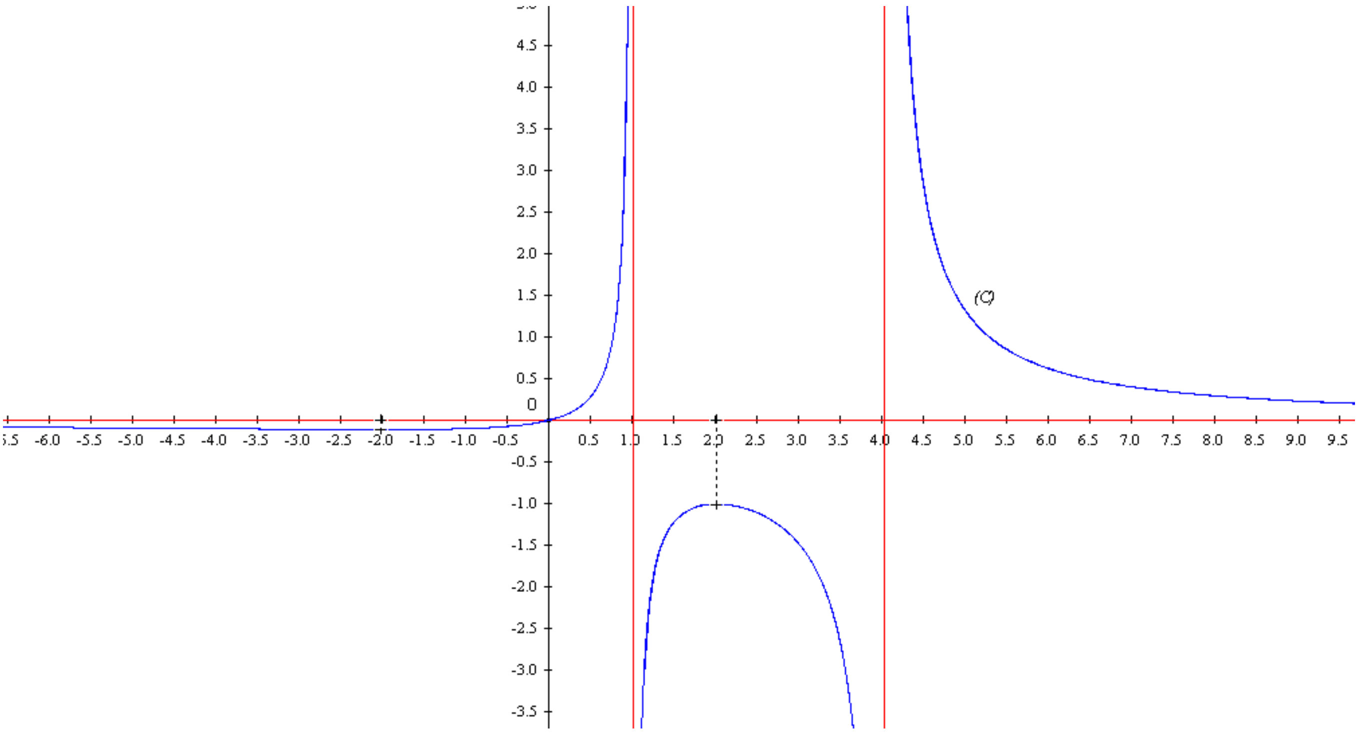
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$-x^2 + 4$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2			$+1$			$+2$			$+4$			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$\Vert$		$+$	0	$-$		$\Vert$		$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↘	$-\frac{1}{9}$	↗	$+\infty$	$\Vert$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$	$\Vert$	$+\infty$	↘	$+\infty$

$f(-2) = \dfrac{-2}{(-2)^2 - 5(-2) + 4} = -\dfrac{2}{18} = -\dfrac{1}{9}$ et $f(+2) = \dfrac{2}{2^2 - 5(2) + 4} = \dfrac{2}{-2} = -1$.

Courbe représentative :



On remarquera que $f(0) = 0$. La courbe (C) passe par l'origine $O(0\ ;\ 0)$.