Etudier les limites des fonctions f suivantes, à l'abscisse a indiquée :

1/ $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $a = -\infty$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Elle se comporte en $-\infty$ comme le rapport de ses plus hauts degrés.

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{|x|} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{-x} = -1$ (Asymptote horizontale $y = -1$).

Remarque sur la méthode :

Se souvenir que $\sqrt{x^2} = |x|$, soit $-x$ lorsque $x < 0$ et x lorsque $x \geq 0$.

2/ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$, $a = +1$

La fonction f est continue sur $[-3 ; +1[\cup]+1 ; +\infty[$, ses deux termes étant eux-mêmes continus.

Si $x \to 1$ $\begin{cases} \sqrt{x+3} - 2 \to 0 \\ x - 1 \to 0 \end{cases}$. On est confronté à une *forme indéterminée* $\dfrac{0}{0}$.

3 modes de résolution sont possibles :

<u>a) Par dérivée :</u>

Soit $g(x) = \sqrt{x+3}$.

On constate que $f(x) = \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1}$, d'où $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{g(x) - g(1)}{x - 1} = g'(1)$ avec $g'(x) = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$.

On conclue : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

<u>b) Par quantité conjuguée :</u>

On multiple les deux termes de $f(x)$ par $\sqrt{a} + b$ (quantité conjuguée du numérateur) , pour qu'apparaisse le produit $(\sqrt{a} - b)(\sqrt{a} + b) = a - b^2$ (sans racine, donc polynôme), permettant alors de simplifier par $x - 1$.

$x \neq 1 \Rightarrow f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \dfrac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{(x+3)-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2}$

D'où : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}$.

Remarque sur la méthode :

Lorsqu'on écrit $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+2} = \dfrac{1}{4}$, on utilise la *continuité* du dénominateur, qui permet de ne pas vraiment prendre la limite, mais de remplacer par $x = 1$, puisque $g(x) = \sqrt{x+3}$ continue en $x = 1 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to 1} g(x) = g(1)$.

Lorsqu'une fonction est <u>continue</u> , on ne fait pas la limite, on remplace par la valeur (si calculable).

<u>c) En se ramenant à $h \to 0$:</u>

Posons $x = 1 + h$, d'où : $x \to 1$ équivaut à $h \to 0$.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{(1+h)+3}-2}{(1+h)-1} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h}-2}{h}.$$

On utilise la *quantité conjuguée* pour éliminer la racine :

$$\lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{4+h}-2)(\sqrt{4+h}+2)}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{(4+h)-4}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{4+h}+2)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}.$$

Remarques sur la méthode :

- Lorsque les facteurs deviennent assez complexes, cette méthode est plus simple, la simplification par h étant plus évidente que celle par $x-1$.
- Lorsqu'on utilise la quantité conjuguée, la racine carré initiale disparaît, mais une autre apparaît : $\dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2}$.

Seulement, cette dernière ne s'annule pas en $h = 0$, donc ne crée pas une situation d'indétermination.

- Dans $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \dfrac{1}{4}$, nous avons à nouveau utilisé la *continuité* pour simplement *remplacer* $h = 0$.
- Comme $h \to 0$, il est très petit par rapport à 4, raison pour laquelle on écrit $\sqrt{4+h}$ (h derrière), alors qu'on aurait écrit $\sqrt{x+4}$ si x était comparable à 4.

3/ $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x}$, $a = 0$

Le numérateur et le dénominateur sont des fonctions continues en $x = 0$, donc plutôt que de réellement calculer la limite, on remplace $x = 0$, or : $\dfrac{(\cos 0)-1}{0} = \dfrac{1-1}{0} = \dfrac{0}{0}$ est une forme indéterminée.

La première méthode de la question 2/ est utilisable :

<u>Par dérivée :</u>

Soit $g(x) = \cos x$.

$$f(x) = \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} = \cos'(0) \text{ avec } \cos'(x) = -\sin x.$$

D'où : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\sin 0 = 0$.

Remarque sur la question :

Ne pas oublier que ces exercices supposent que x est mesuré en *radians* et non en degrés, sinon la dérivée de $\cos x$ n'est pas $-\sin x$.

4/ $f(x) = \sin\left(\dfrac{\pi x + 1}{2x + 1}\right)$, $a = +\infty$

On applique la limite à la *composée* de deux fonctions :

$u(x) = \dfrac{\pi x + 1}{2x + 1}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} u(x) = \dfrac{\pi}{2}$ rapport des plus hauts degrés.

puis : $v(X) = \sin X$ avec $\lim\limits_{X \to \frac{\pi}{2}} v(X) = v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \sin \dfrac{\pi}{2} = +1$ par continuité.

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} (v \circ u)(x) = v[\lim\limits_{x \to +\infty} u(x)] = v\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = +1$.

5/ $\boldsymbol{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 1}}$ **,** $\boldsymbol{a = 0}$ **.**

Par continuité : $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x+1} - 1 = 1 - 1 = 0$, donc la fraction $\dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 1}$ devient *infinie* en $a = 0$.

<u>Détaillons en utilisant la quantité conjuguée :</u>

$x \neq 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{\sqrt{x+1} - 1} = \dfrac{\sqrt{x+1} + 1}{(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+1} - 1)} = \dfrac{\sqrt{x+1} + 1}{x}$.

Le numérateur est *toujours positif* , donc le signe de $f(x)$ dépend du dénominateur x :

D'où : $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ (asymptote verticale $x = 1$) .