On sait que la courbe C_f représentative d'une fonction numérique f définie sur $]-2\ ;+\infty[$, passe par les points $O(0\ ;0)$ et $A(-1\ ;0)$, que la tangente à C_f en O a pour coefficient directeur $\ln(2)$ et que la tangente à C_f au point A a pour équation $y = x + 1$.

1-a) A l'aide des données ci-dessus, donner la valeur de $f(0)$, $f'(0)$, $f(-1)$ et $f'(-1)$.

$O(0\ ;0) \in C_f \Rightarrow f(0) = 0$.

La tangente à C_f en O a pour coefficient directeur $\ln(2) \Rightarrow f'(0) = \ln 2$.

$A(-1\ ;0) \in C_f \Rightarrow f(-1) = 0$.

La tangente à C_f au point A a pour équation $y = x + 1$ (coefficient directeur 1) $\Rightarrow f'(-1) = 1$.

b) Donner une équation de la tangente en O à C_f .

$T_0 : y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Rightarrow T_0 : y = (\ln 2).x = x \ln 2$, *fonction linéaire* .

2/ Nous savons qu'il existe des réels a , b et c tels que, pour tout $x > -2$: $f(x) = (ax^2 + bx + c)\ln(x + 2)$.

a) Exprimer $f(0)$ à l'aide de a , b et c .

$f(0) = c \ln 2$.

b) Exprimer $f'(x)$ à l'aide de a , b et c .

On sait $(u.v)' = u'.v + v'.u$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

$f(x) = (ax^2 + bx + c)\ln(x + 2) \Rightarrow f'(x) = (2ax + b)\ln(x + 2) + (ax^2 + bx + c)\times\dfrac{1}{x+2}$.

$f'(x) = (2ax + b)\ln(x + 2) + \dfrac{ax^2 + bx + c}{x + 2}$.

c) En déduire $f'(0)$ et $f'(-1)$ à l'aide de a , b et c .

$f'(0) = b \ln 2 + \dfrac{c}{2}$.

$f'(-1) = (-2a + b)\ln 1 + \dfrac{a - b + c}{1} = a - b + c$.

d) En déduire les valeurs de a , b et c .

En comparant 1-a) et 2-a) , 2-c) , on déduit :

$$\begin{cases} c \ln 2 = 0 \Leftrightarrow c = 0 \\ b \ln 2 + \dfrac{c}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow b \ln 2 = \ln 2 \Leftrightarrow b = 1 \\ a - b + c = 1 \Leftrightarrow a - 1 = 1 \Leftrightarrow a = 2 \end{cases} .$$

On déduit : $f(x) = (2x^2 + x)\ln(x + 2)$.