Une boîte contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs avec remise de chaque boule après tirage. On arrête le tirage après l'obtention d'une boule blanche.

1/ On limite le nombre de tirages à 4.

On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche. Si on n'a pas tiré de boule blanche après le 4^ème^ tirage on prend $X = 0$.

a) Calculer la probabilité $p(X = 0)$.

Soit B_i l'évènement " Tirer une boule blanche lors du $i^{ème}$ tirage" .

$p(X = 0) = p(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \overline{B_3}, \overline{B_4})$, ces quatre évènements étant *indépendants* entre eux, puisqu'il y a remise de la boule tirée entre chaque tirage.

$p(X = 0) = p(\overline{B_1})\times p(\overline{B_2})\times p(\overline{B_3})\times p(\overline{B_4}) = [p(\overline{B_1})]^4 = \left(\frac{40}{100}\right)^4 = (0{,}4)^4$.

b) Déterminer la loi de probabilité de X, son espérance mathématique $E(X)$ et sa variance $V(X)$.

$p(X = 0) = (0{,}4)^4 = 0{,}0256$.

$p(X = 1) = p(B_1) = \frac{60}{100} = 0{,}6$.

$p(X = 2) = p(\overline{B_1}, B_2) = \frac{40}{100} \times \frac{60}{100} = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$.

$p(X = 3) = p(\overline{B_1}, \overline{B_2}, B_3) = \left(\frac{40}{100}\right)^2 \times \frac{60}{100} = 0{,}16 \times 0{,}6 = 0{,}096$.

$p(X = 4) = p(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \overline{B_3}, B_4) = \left(\frac{40}{100}\right)^3 \times \frac{60}{100} = 0{,}064 \times 0{,}6 = 0{,}0384$.

k	x_k	p_k	p_kx_k	$p_kx_k^2$
0	0	0,0256	0	0
1	1	0,6000	0,6	0,6
2	2	0,2400	0,48	0,96
3	3	0,0960	0,288	0,864
4	4	0,0384	0,1536	0,6144
		$\sum_{k=0}^{4} p_k = 1$	$E(X) = \sum_{k=0}^{4} p_kx_k = 1{,}5216$	$E(X^2) = \sum_{k=0}^{4} p_kx_k^2 = 3{,}0384$

Les deux premières colonnes $(x_k ; p_k)$ sont la *loi de probabilité* de X .

L'espérance mathématique est $E(X) = 1{,}5216$, *rang moyen* de sortie de la première boule blanche.

La variance est $V(X) = E(X^2) – [E(X)]^2 = 3{,}0384 – (1{,}5216)^2 = 0{,}7231$.

L'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 0{,}8504$ dans l'ordre de tirage de la première boule blanche.

2/ On procède maintenant à n tirages au maximum, $n > 1$. X est la variable aléatoire définie comme précédemment, si on n'a pas tiré de boule blanche après les n tirages on prend $X = 0$.

a) Déterminer la loi de probabilité de X .

Pour $k = 0$: $P(X = 0) = p_0 = p(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \ldots, \overline{B_{n-1}}, \overline{B_n}) = (0{,}4)^n$.

Pour $1 \leq k \leq n$: $p(X = k) = p_k = p(\overline{B_1}, \overline{B_2}, \ldots, \overline{B_{k-1}}, B_k) = (0{,}4)^{k-1} \times (0{,}6)$.

b) Montrez que $\mathrm{E}(X) = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right)$ où f est la fonction définie par : $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$.

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} p_k x_k = p_0 x_0 + \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = (0,4)^n \times 0 + 0,6 \sum_{k=1}^{n} (0,4)^{k-1} \times k = 0,6(1 + 2(0,4) + 3(0,4)^2 + \ldots + n(0,4)^{n-1}) .$$

$$\mathrm{E}(X) = \left(\frac{3}{5}\right)\left(1 + 2\left(\frac{2}{5}\right) + 3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \ldots + n\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) = \frac{3}{5} f\left(\frac{2}{5}\right) .$$

c) Calculer la valeur exacte de $\mathrm{E}(X)$ en fonction de n , après avoir trouvé une primitive de f .

$f(x)$ est la dérivée de $F(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n$, somme des $n + 1$ termes d'une *suite géométrique* de raison $x \neq 1$, et de premier terme 1 : $F(x) = u_1 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

On déduit : $f(x) = F'(x) = \dfrac{u'v - v'u}{v^2} = \dfrac{-(n+1)x^n (1 - x) - (-1)(1 - x^{n+1})}{(1 - x)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1 - x)^2}$.

D'où : $$\mathrm{E}(X) = \frac{3}{5} \frac{n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1}{\left(1 - \frac{2}{5}\right)^2} = \frac{5}{3}\left(1 - (n+1)\left(\frac{2}{5}\right)^n + n\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}\right) .$$

On remarquera que pour $n = 4$, *on retrouve* $\mathrm{E}(X) = \frac{5}{3}(1 - 5(0,4)^4 + 4(0,4)^5) = 1,5216$.

d) Calculer la limite de $\mathrm{E}(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

On que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left[n\left(\frac{2}{5}\right)^n\right] = 0$, d'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{E}(X) = \frac{5}{3}$.