La scène se passe en haut d'une falaise au bord de la mer. Pour trouver une plage et aller se baigner, les touristes ne peuvent choisir qu'entre deux plages, l'une à l'Est et l'autre à l'Ouest.

A - Un touriste se retrouve deux jours consécutifs en haut de la falaise. Le premier jour, il choisit au hasard l'une des deux directions. Le second jour, on admet que la probabilité qu'il choisisse une direction opposée à celle prise la veille vaut 0,8 .
Pour $i = 1$ ou $i = 2$, on note E_i l'évènement : "Le touriste se dirige vers l'Est le *i-ième* jour" et O_i l'évènement : "Le touriste se dirige vers l'Ouest le *i-ième* jour".

1/ Dresser un arbre de probabilités décrivant la situation.

$$\bullet \begin{cases} \xrightarrow{0,5} E_1 & \begin{cases} \xrightarrow{0,2} E_2 \\ \xrightarrow{0,8} O_2 \end{cases} \\ \xrightarrow{0,5} O_1 & \begin{cases} \xrightarrow{0,8} E_2 \\ \xrightarrow{0,2} O_2 \end{cases} \end{cases}$$

2/ Déterminer les probabilités suivantes : $p(E_1)$, $p_{E1}(O_2)$, $p(E_1 \cap E_2)$.

$p(E_1) = p(O_1) = 0,5$.

$p_{E1}(O_2) = p_{O1}(E_2) = 0,8$ et $p_{E1}(E_2) = p_{O1}(O_2) = 0,2$.

$p(E_1 \cap E_2) = p(E_1) \times p_{E1}(E_2) = 0,5 \times 0,2 = 0,1$.

3/ Calculer la probabilité que ce touriste se rende sur la même plage deux jours consécutifs.

$p = p(E_1 \cap E_2) + p(O_1 \cap O_2) = 2\, p(E_1 \cap E_2) = 0,2$ (évènements incompatibles).

On pouvait aussi dire que le premier choix importe peu, et la probabilité cherchée est celle de faire un second choix identique au premier, donc $p = 0,2$.

B - On suppose maintenant que n touristes ($n \geq 3$) se retrouvent un jour en haut de la falaise.
Ces n touristes veulent tous se baigner et chacun d'eux choisit au hasard et indépendamment des autres l'une des deux directions.
On note X la variable aléatoire donnant le nombre de ces touristes qui choisissent la page à l'Est.

1/ Déterminer la probabilité que k touristes ($0 \leq k \leq n$) partent en direction de l'Est.

X suit la loi binomiale $X = B(n, p) = B(n , 0,5)$, d'où :

$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} (0,5)^k (0,5)^{n-k} = \binom{n}{k} (0,5)^n = \binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}$.

2/ On suppose ici que les deux plages considérées sont désertes au départ. On dit qu'un touriste est *heureux* s'il se retrouve seul sur une plage.

a) Peut-il y avoir deux touristes heureux ?

La seule possibilité est que l'un soit seul à l'Est et l'autre seul à l'Ouest, mais sachant $n \geq 3$, cette situation est impossible.

b) Démontrer que la probabilité, notée p , qu'il y ait un touriste *heureux* parmi ces n touristes vaut : $p = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Un seul baigneur doit aller vers l'Est, les $n - 1$ autres vers l'Ouest, ou encore, un seul baigneur vers l'Ouest, les $n - 1$ autres vers l'Est : $p = p(X = 1) + p(X = n - 1) = \binom{n}{1}\times\frac{1}{2^n} + \binom{n}{n-1}\times\frac{1}{2^n}$ avec $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

D'où : $p = 2n \times \frac{1}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

c) *Application numérique :*

Lorsque le groupe comprend 10 personnes, exprimer la probabilité, arrondie au centième, qu'il y ait un touriste heureux parmi les 10 .

$n = 10 \Rightarrow p = \frac{10}{2^9} = \frac{5}{256} = 0{,}02$ par excès.