La suite (u_n) est définie par : $u_1 = 1$ et $u_{n+1} = u_n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ pour tout entier n non nul.

1/ Calculer u_2 , u_3 et u_4 .

$$u_2 = u_1\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\,u_1 = \frac{1}{2}\,.$$

$$u_3 = u_2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\,u_2 = \frac{1}{3}\,.$$

$$u_4 = u_3\left(1 - \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4}\,u_3 = \frac{1}{4}\,.$$

2/ Conjecturer la formule qui donne u_n en fonction de n .

Les quelques résultats précédents laissent *conjecturer* : $u_n = \dfrac{1}{n}$.

3/ Démontrer cette formule par récurrence.

Soit la relation de récurrence P_n : " $u_n = \dfrac{1}{n}$ " .

a) *Initialisation* : Vérifions P_1 vraie, soit $u_1 = \dfrac{1}{1} = 1$, ce qui est vrai.

b) *Hérédité* : Supposons P_n vraie ($u_n = \dfrac{1}{n}$) . Peut-on en déduire P_{n+1} vraie ($u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$) ?

$u_{n+1} = u_n\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$ dans lequel on reporte $u_n = \dfrac{1}{n}$, puisque P_n est supposée vraie.

$$u_{n+1} = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{(n+1)-1}{n+1} = \frac{1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\,.$$

On a bien montré que P_{n+1} est vraie, <u>sous réserves que</u> P_n <u>le soit</u>.

c) *Conclusion* : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, soit $u_n = \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.