Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $e^x = 3$

On sait que e^x est *défini* pour tout x réel, et que $e^x > 0$, quel que soit x réel.

Par ailleurs : $e^a = b \Leftrightarrow a = \ln(b)$ pour tout $b > 0$.

$e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$, soit $S = \{\ln(3)\}$.

b) $e^x + 1 = 0$

$e^x + 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = -1$, ce qui est impossible puisque $e^a > 0$, pour tout a réel. Donc $S = \varnothing$.

c) $e^{2x} + 3e^x - 4 = 0$

On pose $X = e^x > 0$. Sachant $e^{2x} = (e^x)^2$, on déduit : $X^2 + 3X - 4 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 9 + 16 = 25 = 5^2 \Rightarrow X' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 - 5}{2} = -4$ et $X'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3 + 5}{2} = +1$.

En conséquence, en revenant au changement de variable $X = e^x$: $\left\{\begin{array}{c} e^x = -4 \text{ impossible} \\ e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln(1) = 0 \end{array}\right\}$, soit $S = \{0\}$.

d) $e^x - 15e^{-x} = 2$

On sait $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$, d'où : $e^x - \dfrac{15}{e^x} = 2 \Leftrightarrow \dfrac{(e^x)^2 - 15}{e^x} = 2 \Leftrightarrow (e^x)^2 - 15 = 2e^x \Leftrightarrow (e^x)^2 - 2e^x - 15 = 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 + 60 = 64 = 8^2 \Rightarrow X' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 - 8}{2} = -3$ et $X'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{2 + 8}{2} = +5$.

En conséquence, en revenant au changement de variable $X = e^x$: $\left\{\begin{array}{c} e^x = -3 \text{ impossible} \\ e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln(5) \end{array}\right\}$, soit $S = \{\ln 5\}$.

e) $e^x > 3$

On sait que $0 < a < b \Rightarrow \ln a < \ln b$ (le logarithme conserve les ordres).

$e^x > 3 \Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln 3 \Leftrightarrow x > \ln 3$. D'où : $S =]\ln 3\,;+\infty[$.

f) $e^x > -1$

On sait $e^a > 0$ pour tout a réel. Donc l'inéquation précédente est toujours vérifiée, soit : $S = \mathbb{R}$.

g) $e^{2x} > 5$

$e^{2x} > 5 \Leftrightarrow \ln(e^{2x}) > \ln 5 \Leftrightarrow 2x > \ln 5 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}\ln 5$, soit : $S =]\dfrac{1}{2}\ln 5\,;+\infty[$.