Calculer les dérivées des fonctions suivantes, après avoir défini le domaine de dérivation.

a) $f(x) = x.e^x$

f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f = u.v \Rightarrow f' = u'v + uv'$. D'où : $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x) = 1.e^x + x.e^x = (x+1)e^x$.

b) $g(x) = \dfrac{x}{e^x}$

g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme rapport de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, car de dénominateur jamais nul ($e^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$).

$g = \dfrac{u}{v} \Rightarrow g' = \dfrac{u'.v - v'.u}{v^2}$. D'où : $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^x \Rightarrow v'(x) = e^x \end{array}\right\} \Rightarrow g'(x) = \dfrac{1.e^x - x.e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{(1-x)e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{1-x}{e^x}$.

***Autre Méthode* :**

On sait : $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$ et $(e^u)' = u'.e^u$.

$g = u.v \Rightarrow g' = u'v + uv'$. D'où : $g(x) = x.e^{-x}$ et $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{-x} \Rightarrow v'(x) = (-1)e^{-x} = -e^{-x} \end{array}\right.$.

$g'(x) = 1.e^{-x} + x.(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$ (on garde généralement cette présentation, mais on peut écrire $g'(x) = \dfrac{1-x}{e^x}$).

c) $h(x) = \sqrt{e^x}$

La fonction "racine" est définie et continue sur $[0 ; +\infty[$, et dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Comme $e^x > 0$, pour tout x réel, on peut conclure que h est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme *composée* de fonctions définies, continues et dérivables sur leurs domaines respectifs.

On sait $\sqrt{u} = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$, d'où : $u(x) = e^x \Rightarrow u'(x) = e^x$ et $h'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} = \dfrac{e^x}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{(\sqrt{e^x})^2}{2\sqrt{e^x}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

***Autre Méthode (préférable)* :**

On sait $\sqrt{u} = u^{1/2}$, d'où : $h(x) = (e^x)^{1/2} = e^{x/2}$. Par ailleurs : $(e^u)' = u'.e^u$.

On déduit : $h'(x) = (e^{x/2})' = \left(\dfrac{x}{2}\right)'.e^{x/2} = \dfrac{1}{2}e^{x/2}$, qui peut éventuellement s'écrire : $h'(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{e^x}$.

d) $k(x) = x.\ e^{x^2}$

k est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

$k = u.v \Rightarrow k' = u'v + uv'$. D'où : $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1 \\ v(x) = e^{x^2} \Rightarrow v'(x) = 2x\,e^{x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow k'(x) = 1.\,e^{x^2} + 2x\,e^{x^2} = (2x+1)\,e^{x^2}$.