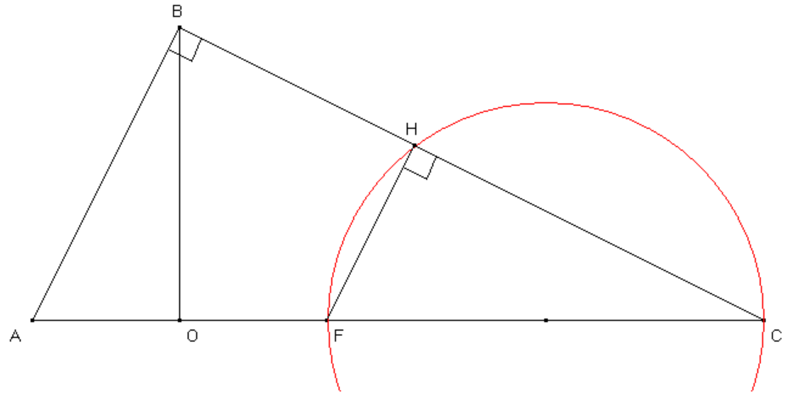
Pour la figure ci-dessous, l'unité de longueur est le centimètre.

Les points A , O , F , C sont alignés dans cet ordre. $AC = 15$, $AO = OF = 3$ et $BO = 6$.

Les droites (BO) et (AC) sont perpendiculaires.

On complètera la figure au fur et à mesure des questions.



1/ Prouver que $AB = 3\sqrt{5}$ et $BC = 6\sqrt{5}$.

Le triangle AOB est rectangle en O . D'après le théorème de Pythagore : $AB^2 = AO^2 + OB^2 = 3^2 + 6^2$,

$AB^2 = 9 + 36 = 45$, d'où : $AB = \sqrt{45} = \sqrt{9\times5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$.

Le triangle BOC est rectangle en O . D'après le théorème de Pythagore : $BC^2 = OC^2 + OB^2$.

$OC = AC - AO = 15 - 3 = 12$, d'où : $BC^2 = 12^2 + 6^2 = 144 + 36 = 180$, soit :

$BC = \sqrt{180} = \sqrt{36\times5} = \sqrt{36}\times\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$.

2/ Démontrer que les droites (AB) et (BC) sont perpendiculaires.

Vérifions la réciproque du théorème de Pythagore dans le triangle ABC :

$AC^2 = 15^2 = 225$ et $AB^2 + BC^2 = 45 + 180 = 225$, d'après la question précédente.

L'égalité $AC^2 = AB^2 + BC^2$ est vérifiée, ce qui prouve que le triangle ABC est rectangle en B .

3-a) Construire le cercle (C) de diamètre $[FC]$ qui recoupe la droite (BC) en H .

b) Démontrer que le triangle FHC est rectangle.

Le triangle FHC est *inscrit* dans le demi-cercle (C) de diamètre $[FC]$. Or, tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle.

Le triangle FHC est donc rectangle en H .

c) Démontrer que les droites (AB) et (FH) sont parallèles.

Les droites (AB) et (FH) sont toutes deux perpendiculaire à la droite (BC) , donc sont parallèles entre elles.

d) Calculer CF puis CH .

Calcul de CF :

Sur le segment $[AC]$: $CF = AC - AF = 15 - 2\times3 = 15 - 6 = 9$.

Calcul de CH :

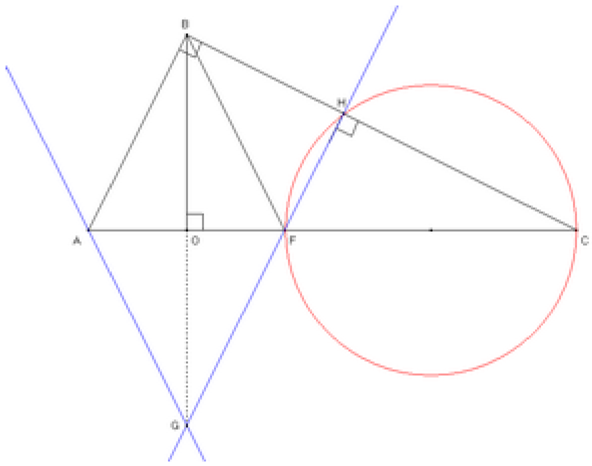
- Les points C , F , A sont alignés,
- Les points C , H , B sont alignés,

- Les droites (FH) et (AB) sont parallèles :

D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{CH}{CB} = \dfrac{CF}{CA} = \dfrac{FH}{AB}$.

$$\frac{CH}{CB} = \frac{CF}{CA} \Leftrightarrow \frac{CH}{6\sqrt{5}} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow \frac{CH}{6\sqrt{5}} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow CH = \frac{3 \times 6\sqrt{5}}{5} = \frac{18\sqrt{5}}{5} .$$

4/ Démontrer que le triangle BAF est isocèle.



La droite (OB) est perpendiculaire au milieu du segment $[AF]$, donc (OB) est la *médiatrice* de $[AF]$.

Tout point situé sur la médiatrice d'un segment est *équidistant* des extrémités de ce segment, donc : $BA = BF$, ce qui prouve que le triangle BAF est *isocèle*, de sommet B.

Remarque : On pouvait aussi dire que, dans le triangle BAF, la droite (BO) est à la fois *hauteur* du triangle et *médiatrice* d'un côté, ce qui n'est possible que dans les triangles isocèles.

5-a) Tracer par A la parallèle à la droite (BF), qui coupe la droite (HF) en G.

Voir la figure ci-dessus.

b) Démontrer que le quadrilatère $ABFG$ est un losange.

Le quadrilatère $ABFG$ a ses *côtés opposés parallèles deux à deux*, puisque : $(BA) // (GF)$ er $(BF) // (AG)$.

$ABFG$ est donc un *parallélogramme*.

Par ailleurs, ses *deux côtés consécutifs* BA et BF sont *égaux*, ce qui prouve qu'il s'agit d'un *losange*.

Remarque : On pouvait aussi dire que ses diagonales (BG) et (AF) sont perpendiculaires en O, ce qui prouvait également que ce parallélogramme est un losange.

6/ Montrer que le triangle OBC a la même aire que le losange $ABFG$.

$$Aire_{OBC} = \frac{OC \times OB}{2} = \frac{12 \times 6}{2} = 36 \text{ cm}^2 .$$

$$Aire_{ABFG} = 2 \times Aire_{ABF} = 2 \times \frac{AF \times OB}{2} = 2 \times \frac{6 \times 6}{2} = 2 \times 18 = 36 \text{ cm}^2 .$$