Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x - 1$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}; \vec{j})$ (unité 2 cm).

1-a) Etudier les variations de f : limites aux bornes de l'ensemble de définition, dérivée, tableau de variation.

Pour déterminer la limite de f en $+\infty$, on pourra écrire $f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

f est une fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions définies, continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.

Limites aux bornes :

Si $x \to -\infty$ $\left\{\begin{array}{c} e^x \to 0 \\ -x - 1 \to +\infty \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Si $x \to +\infty$ $\left\{\begin{array}{c} e^x \to +\infty \\ -x - 1 \to -\infty \end{array}\right\}$ d'où : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ indéterminé de forme $\infty - \infty$.

Pour lever l'indétermination, on force la factorisation de x afin de mettre le terme $\dfrac{e^x}{x}$ en évidence :

$f(x) = x\left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right)$ avec $\left\{\begin{array}{c} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0 \end{array}\right\}$ qui entraîne : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{e^x}{x} - 1 - \dfrac{1}{x}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Dérivée :

$f(x) = e^x - x - 1 \Rightarrow f'(x) = e^x - 1$.

- Recherche des extremum : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$.

L'ordonnée de l'extremum est $y = f(1) = e^1 - 1 - 1 = e - 2 \approx 0{,}718$.

L'extremum est en $E(+1\,;\, e - 2)$.

- Signe de la dérivée : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow \ln(e^x) > \ln 1$ puisque la fonction logarithme, croissante, conserve les ordres. On déduit : $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

- Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Comme le minimum E est d'ordonnée $y = f(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$.

On conclue que, pour tout x réel, $f(x) \geq 0$, soit : $f(x)$ partout positif.

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x - 1$ est asymptote oblique à (C).

On étudie le comportement aux infinis de l'écart $E(x) = f(x) - (-x - 1)$ entre la courbe (C) est la droite (D).

(On note que $E(x)$ mesure l'écart algébrique vertical allant de (D) jusqu'à (C)).

$E(x) = f(x) - (-x - 1) = e^x$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} E(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$, ce qui prouve que $D : y = -x - 1$ est asymptote oblique à (C) vers $-\infty$.

Par contre : $\lim\limits_{x \to +\infty} E(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$. Il n'y a donc pas d'asymptote du côté $+\infty$.

c) Déterminer une équation de la tangente (*T*) à (*C*) au point d'abscisse +1 .

On sait : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

D'où : $T_1 : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ avec $f'(1) = e - 1$ et $f(1) = e - 2$.

On conclue : $T_1 : y = (e - 1)(x - 1) + (e - 2)$ ou $T_1 : y = (e - 1)x - 1$.

Rappel : Un tangente est une droite dont l'équation est de la forme : $y = ax + b$, ce qui est bien le cas.

Construire (*D*) , (*T*) et (*C*) .