On considère l'expression $F = (2x - 5)^2 - (4x - 1)^2$.

1/ Développer et réduire F .

On sait : $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

$F = [(2x)^2 - 2(2x)(5) + 5^2] - [(4x)^2 - 2(4x)(1) + 1^2]$

$F = (4x^2 - 20x + 25) - (16x^2 - 8x + 1)$

$F = 4x^2 - 20x + 25 - 16x^2 + 8x - 1$

$F = -12x^2 - 12x + 24$.

2/ Factoriser F .

On a affaire à une identité remarquable : $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ (*différence de deux carrés*).

$A = 2x - 5$ et $B = 4x - 1$.

$F = [(2x - 5) - (4x - 1)][(2x - 5) + (4x - 1)]$

$F = (2x - 5 - 4x + 1)(2x - 5 + 4x - 1)$

$F = (-2x - 4)(6x - 6)$.

On peut encore factoriser +2 dans le premier facteur, et +6 dans le second :

$F = (+2)(-x - 2)(+6)(x - 1)$

$F = 12(-x - 2)(x - 1)$.

3/ Calculer la valeur de F pour $x = \frac{2}{3}$.

Il semble plus facile de remplacer $x = \frac{2}{3}$ dans la forme développée :

$F = -12x^2 - 12x + 24 = 12(-x^2 - x + 2)$.

$$F = 12\left[-\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right) + 2\right]$$

$$F = 12\left(-\frac{4}{9} - \frac{2}{3} + 2\right) = 12 \times \frac{-4 - 6 + 18}{9} = 12 \times \frac{8}{9} = 4 \times \frac{8}{3} = +\frac{32}{3} .$$

4/ Résoudre l'équation $F = 0$.

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un ou l'autre de ses facteurs est nul :

$$F = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x = +4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{2} = -2 \\ \text{ou} \\ 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow 6x = 6 \Leftrightarrow x = +\frac{6}{6} = +1 \end{array} \right\} . \text{ D'où : } S = \{ -2 ; +1 \} .$$