Solution – Raisonnement par Récurrence - s3951

1/ Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que : $(4n+3)\sqrt{n} < (4n+1)\sqrt{n+1}$.

Les deux membres étant positifs, la mise au carré de l'inéquation n'en change pas le sens.

$(4n+3)\sqrt{n} < (4n+1)\sqrt{n+1} \Leftrightarrow (4n+3)^2.n < (4n+1)^2(n+1)$

$n(16n^2+24n+9) < (n+1)(16n^2+8n+1)$

$16n^3+24n^2+9n < 16n^2+24n^2+9n+1 \Leftrightarrow 0 < 1$, vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

L'inéquation initiale est donc vérifiée pour tout n entier naturel non nul.

2/ Démontrer, en raisonnant par récurrence : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} < \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

Soit la proposition de récurrence P_n : " $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{n} < \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$ " .

<u>Remarque</u> : *Notation symbolique* : $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k} < \dfrac{4n+3}{6}\sqrt{n}$.

a) *Initialisation* : Vérifions P_1 vraie :

P_1 dit : "$\sqrt{1} < \dfrac{4\times 1+3}{6}\sqrt{1}$ " , soit $1 < \dfrac{7}{6}$, ce qui est vrai.

b) *Hérédité* : Supposons P_k vraie ($\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k} < \dfrac{4k+3}{6}\sqrt{k}$) .

Peut-on en déduire P_{k+1} vraie ($\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} < \dfrac{4(k+1)+3}{6}\sqrt{k+1}$) ?

Il faut établir un lien entre les deux expressions :

$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} = (\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k})+\sqrt{k+1}$

$(\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k})+\sqrt{k+1} < \left(\dfrac{4k+3}{6}\sqrt{k}\right)+\sqrt{k+1}$ puisque P_k est *supposée vraie* .

D'après 1/ : $(4k+3)\sqrt{k} < (4k+1)\sqrt{k+1}$, d'où : $\left(\dfrac{4k+3}{6}\sqrt{k}\right)+\sqrt{k+1} < \left(\dfrac{4k+1}{6}\sqrt{k+1}\right)+\sqrt{k+1}$.

On déduit : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} < \dfrac{4k+7}{6}\sqrt{k+1}$

ou encore : $\sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots+\sqrt{k}+\sqrt{k+1} < \dfrac{4(k+1)+3}{6}\sqrt{k+1}$.

La proposition P_{k+1} est vraie *sous réserves* que P_k le soit.

c) *Conclusion* : L'*initialisation* et l'*hérédité* étant vérifiées, on peut affirmer : P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3/ Pour $n = 36$, estimer les deux membres de l'égalité.

$n = 36$. P_{36} étant vraie $\Rightarrow \sum_{k=1}^{36}\sqrt{k} = \sqrt{1}+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\ldots.+\sqrt{36} < \dfrac{4\times 36+3}{6}\sqrt{36}$, soit $\sum_{k=1}^{36}\sqrt{k} < 147$.

La calculatrice donne : $\sum_{k=1}^{36}\sqrt{k} = 146{,}799$ par défaut à 10^{-3} près.