Solution – Fonction Logarithme - s3940

Etude et graphe de $f(x) = \left(\dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2$.

1/ *Domaine de définition*

$f(x)$ est défini si et seulement si $\begin{cases} x > 0 \text{ pour que } \ln x \text{ existe} \\ 1 + \ln x \neq 0 \text{ pour que la fraction soit définie} \end{cases}$.

$1 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$.

Donc : f est *définie*, *continue*, *dérivable* sur $\mathbb{R}_+^* - \{\dfrac{1}{e}\} =]0 ; \dfrac{1}{e}[\cup]\dfrac{1}{e} ; +\infty[$.

2/ *Limites aux bornes du domaine*

a) Si $x \to 0^+$ alors $\ln x \to -\infty$, donc $\dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ est *indéterminé* de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On lève l'indétermination en factorisant $\ln x$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{(\ln x)(\frac{1}{\ln x} - 1)}{(\ln x)(\frac{1}{\ln x} + 1)} = \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{\frac{1}{\ln x} + 1} \quad \text{avec } \frac{1}{\ln x} \to 0 \text{ lorsque } x \to 0^+ .$$

On déduit : $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2 = +1$, soit $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +1$.

On pourrait poser $f(0) = +1$ en prolongeant f en 0 par continuité.

b) Si $x \to +\infty$ alors $\ln x \to +\infty$, donc $\dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ est *indéterminé* de forme $\dfrac{\infty}{\infty}$.

On lève l'indétermination à l'identique en factorisant $\ln x$ au numérateur et au dénominateur :

$$\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = \frac{(\ln x)(\frac{1}{\ln x} - 1)}{(\ln x)(\frac{1}{\ln x} + 1)} = \frac{\frac{1}{\ln x} - 1}{\frac{1}{\ln x} + 1} \quad \text{avec } \frac{1}{\ln x} \to 0 \text{ lorsque } x \to +\infty .$$

On déduit : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2 = +1$, soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +1$.

La courbe représentative admet une *asymptote horizontale* $y = 1$.

c) Si $x \to \dfrac{1}{e}^-$ (par valeurs inférieures) . Dans le domaine, on a vu : $\ln \dfrac{1}{e} = -1$.

La fonction $\ln x$ est *continue* sur $]0 ; +\infty[$, donc : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} (1 - \ln x) = 1 - \ln \dfrac{1}{e} = +2$.

La fonction $\ln x$ est *continue*, *strictement croissante*, donc $0 < x < \dfrac{1}{e} \Rightarrow \ln x < \ln \dfrac{1}{e}$, soit $\ln x < -\ln e$.

$\ln x < -1 \Rightarrow 1 + \ln x < 0$, donc : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}^-} (1 + \ln x) = 1 + \ln \dfrac{1}{e} = 0^-$.

Si $x \to \frac{1^-}{e}$ alors $\left\{ \begin{array}{l} 1 - \ln x \to 2 \\ 1 + \ln x \to 0^- \end{array} \right\}$ d'où $\lim_{x \to \frac{1^-}{e}} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{1^-}{e}} \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2 = +\infty$.

On déduit : $\lim_{x \to \frac{1^-}{e}} f(x) = +\infty$.

De même : Si $x \to \frac{1^+}{e}$ (par valeurs supérieures) ,

La fonction $\ln x$ est *continue* sur $]0\,;+\infty[$, donc : $\lim_{x \to \frac{1^+}{e}} (1 - \ln x) = 1 - \ln\frac{1}{e} = +2$.

La fonction $\ln x$ est *continue*, *strictement croissante*, donc $x > \frac{1}{e} \Rightarrow \ln x > \ln\frac{1}{e}$, soit $\ln x > -\ln e$.

$\ln x > -1 \Rightarrow 1 + \ln x > 0$, donc : $\lim_{x \to \frac{1^+}{e}} (1 + \ln x) = 1 + \ln\frac{1}{e} = 0^+$.

Si $x \to \frac{1^+}{e}$ alors $\left\{ \begin{array}{l} 1 - \ln x \to 2 \\ 1 + \ln x \to 0^+ \end{array} \right\}$ d'où $\lim_{x \to \frac{1^+}{e}} \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x} = +\infty$ et $\lim_{x \to \frac{1^+}{e}} \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2 = +\infty$.

On déduit : $\lim_{x \to \frac{1^+}{e}} f(x) = +\infty$.

La fonction f admet une *asymptote verticale* $x = \frac{1}{e}$ (On remarquera que des deux côtés de l'asymptote verticale la limite est $+\infty$) .

3/ *Dérivée* :

$f(x) = \left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right)^2$ est de la forme $f = U^2$, donc de dérivée $f' = 2U.U'$.

$U = \frac{u}{v} \Rightarrow U' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$f'(x) = 2\left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right).\frac{-\frac{1}{x}(1 + \ln x) - \frac{1}{x}(1 - \ln x)}{(1 + \ln x)^2} = 2\left(\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}\right).\frac{-\frac{2}{x}}{(1 + \ln x)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{4(1 - \ln x)}{x(1 + \ln x)^3} .$$

Recherche des Extremums :

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$, d'ordonnée $y = f(e) = \left(\frac{1 - \ln e}{1 + \ln e}\right)^2 = 0$.

Il existe un extremum unique en $E(e\,;0)$.

Signe de la dérivée :

On sait que $A^3 = A \times A^2$ est du signe de A , donc $f'(x)$ est du signe de $\frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$ puisque $x > 0$.

Le numérateur s'annule en $x = e$, le dénominateur en $x = -\frac{1}{e}$.

En exploitant la croissance continue de la fonction "$\ln x$" , on obtient le tableau de signes suivant :

Tableau de variations :

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$\ln x - 1$	$\vert$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
$\ln x + 1$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

x	0		$1/e$		e		$+\infty$
$f'(x)$	$\vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Graphe :