**Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ .**

**Déterminer les équations des tangentes à la courbe représentative de $f$ qui passent par l'origine $O$ du repère.**

$f$ est, comme toute fonction polynôme, définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ .

$f(x) = x^3 + x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2x$ .

L'équation de la tangente à $C_f$ en $x = a$ est : $T_a \mid y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

$T_a \mid y = f'(a).x + [f(a) - a.f'(a)]$ que l'on a ramené à $y = Ax + B$ , forme réduite de l'équation d'une droite.

Pour que cette *droite affine* passe par l'origine $O(0 ; 0)$ , il faut et il suffit qu'elle soit *linéaire* , donc que $B = 0$ .

$B = 0 \Leftrightarrow f(a) - a.f'(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = a.f'(a) \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 1 = a(3a^2 + 2a) \Leftrightarrow a^3 + a^2 - 1 = 3a^3 + 2a^2$ .

On déduit : $2a^3 + a^2 + 1 = 0$ .

*Recherche d'une racine évidente* :

$a = -1 \Rightarrow 2(-1)^3 + (-1)^2 + 1 = 0$ , soit $-2 + 1 + 1 = 0$ . Donc $a = -1$ est racine de ce polynôme.

| *On sait que* : Pour tout polynôme $P(x)$ , si $P(\alpha) = 0$ , on peut factoriser $x - \alpha$ |
|---|

$a = -1$ étant racine, on peut factoriser $a + 1$ :

Le polynôme initial étant du 3ème degré, la factorisation de $a + 1$ sera complétée par un polynôme du second degré :

$2a^3 + a^2 + 1 = (a + 1)(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C})$ .

On développe ce produit, pour *l'identifier* au polynôme initial :

$(a + 1)(\mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C}) = \mathrm{A}a^3 + \mathrm{B}a^2 + \mathrm{C}a + \mathrm{A}a^2 + \mathrm{B}a + \mathrm{C} = \mathrm{A}a^3 + (\mathrm{A} + \mathrm{B})a^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{C})a + \mathrm{C}$ .

Les polynômes $\mathrm{A}a^3 + (\mathrm{A} + \mathrm{B})a^2 + (\mathrm{B} + \mathrm{C})a + \mathrm{C}$ et $2a^3 + a^2 + 1$ sont *identiques* , ce qui signifie qu'ils sont égaux pour toute valeur réelle de $a$ .

| Deux polynômes *identiques* (partout égaux) ont *même coefficient* pour toute puissance de la variable (même écriture) |
|---|

D'où : $\left\{\begin{array}{c} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{A} + \mathrm{B} = 1 \\ \mathrm{B} + \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{C} + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \mathrm{A} = 2 \\ \mathrm{B} = -1 \\ \mathrm{C} = 1 \end{array}\right\}$ d'où : $2a^3 + a^2 + 1 = (a + 1)(2a^2 - a + 1)$ .

*Fin de la résolution de* : $2a^3 + a^2 + 1 = 0$ .

$2a^3 + a^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (a + 1)(2a^2 - a + 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1 \\ 2a^2 - a + 1 = 0 : \Delta = -7 \text{ (pas de racine)} \end{array}\right.$ .

La seule solution est $a = -1$ .

On reporte dans $T_a \mid y = f'(a).x + [f(a) - a.f'(a)]$ sachant qu'alors $B = f(a) - a.f'(a) = 0$ .

D'où : $T_{-1} \mid y = f'(-1).x$ avec $f'(x) = 3x^2 + 2x$ , soit $f'(-1) = +1$ .

La seule tangente à $C_f$ passant par l'origine est $T_{-1} \mid y = x$ , qui est tangente en $A(-1 ; f(-1))$ avec $f(-1) = -1$ .

*Confirmation graphique* :